

Processos de ramificació, criticitat i autoorganització: aplicació als desastres naturals

ÁLVARO CORRAL I FRANCESC FONT-CLOS

Només els beneïts, els xarlatans i els mentiders prediuen terratrèmols.

C. F. Richter

Resum: L'estadística dels desastres naturals conté molts resultats antiintuitius. Fent servir els terratrèmols com a exemple, mostrarem que l'energia radiada per aquests esdeveniments segueix una distribució de tipus Pareto, és a dir, una llei de potències. Això implica, en teoria, que el valor esperat de l'energia és infinit, i a la pràctica, que la mitjana d'un conjunt finit de dades mai no és representativa del total de la població. A més a més, aquesta distribució presenta invariància d'escala i, per tant, és impossible definir una escala característica per a l'energia. Un model simple capaç de reproduir aquesta peculiar estadística són els anomenats processos de ramificació; per exemple, el lliscament o desplaçament d'un segment de falla pot conduir al desplaçament d'altres segments, amb certa probabilitat. Tot i que inicialment els sismòlegs no n'eren conscients, aquest model és un cas particular del procés estocàstic estudiat per Galton i Watson un segle enrere, en aquell cas per a modelar l'extinció de les famílies (benestants). Obtindrem les propietats principals d'aquests models mitjançant el formalisme de les funcions generatrius de moments. Sorprenentment, la distribució de potència per a l'energia pot recuperar-se tan sols en un cas molt particular: quan el procés de ramificació es troba just entre l'atenuació i la intensificació, és a dir, en la criticitat. Per a donar sentit a aquest fet, introduïrem els models de criticitat autoorganitzada, en els quals mitjançant un mecanisme de retroalimentació l'estat crític esdevé un atractor en l'evolució del sistema. Al llarg del text es mostren algunes analogies amb conceptes bàsics de física estadística. La major part del material és autocontingut, excepte el que té a veure amb coneixements elementals de teoria de probabilitat.

Paraules clau: processos de ramificació, model de Galton-Watson, criticitat, autoorganització, lleis de potències, llei de Gutenberg-Richter.

Classificació MSC2010: 60J80, 60J85.

1 L'estadística dels desastres naturals

Des dels inicis dels temps, la humanitat ha viscut sota l'amenaça dels desastres naturals: inundacions, erupcions volcàniques, tsunamis, terratrèmols, huracans, etc. Es tracta, d'alguna manera, d'una espasa de Dàmocles de la qual, en ple segle XXI, les nostres societats encara no han pogut desfer-se. Ara bé, aquests fenòmens totalment capritxosos són obra de la fúria dels déus, o amaguen potser certes regularitats? La primera visió ha dominat el pensament humà durant molts segles, i fins fa poc no s'ha començat a consolidar una perspectiva més racional.

1.1 La llei de Gutenberg-Richter

Una de les primeres lleis per quantificar l'ocurrència d'un desastre natural va ser proposada pels famosos sismòlegs Beno Gutenberg i Charles F. Richter, cap a l'any 1940, tot aprofitant el desenvolupament recent de la primera escala de magnituds per part del mateix Richter. La llei de Gutenberg-Richter és sorprenentment simple: si comptem el nombre de terratrèmols a qualsevol regió sísmicament activa del món durant un període de temps suficientment llarg, trobarem que per cada 100 terratrèmols de magnitud $M \geq 4$ hi ha, aproximadament (de mitjana), 10 terratrèmols amb $M \geq 5$, 1 terratrèmol amb $M \geq 6$, i així successivament [11, 17]. Per tant, la gran majoria d'esdeveniments són els més petits i, per sort, només una mínima part poden ser devastadors; es manté sempre una proporció constant entre el seu nombre.

Tot i que no és possible mesurar tots els terratrèmols del planeta, en algunes àrees on l'activitat sísmica es monitoritza amb molta precisió s'ha validat la llei de Gutenberg-Richter fins a la magnitud -4 ; això correspon a petites esquerdes o trencaments en roques de pocs centímetres (les magnituds negatives s'han introduït per a poder treballar amb terratrèmols més petits que els de magnitud 0). I, per si no fos prou, en experiments de nanofractures al laboratori, la llei s'ha validat fins a magnituds inferiors a -13 . Per altra banda, l'escassetat de grans esdeveniments (escassetat que la pròpia llei prediu), impedeix determinar quina és la fita superior de validesa d'aquesta llei.

Tot i que Gutenberg i Richter no ho mencionen en el seu article [11], un estudiant de probabilitat i estadística s'adonarà immediatament que la llei de Gutenberg-Richter implica una distribució exponencial per a la magnitud dels terratrèmols, és a dir,

$$D_M(M) \propto 10^{-bM},$$

on $D_M(M)$ és la funció de densitat de M , b és un paràmetre proper a 1 i el símbol \propto indica proporcionalitat; la constant de proporcionalitat es pot determinar amb la condició de normalització de $D_M(M)$.

Només donarem un parell de pistes sobre com es pot deduir la relació anterior: partint del nombre de terratrèmols superiors a una certa magnitud es pot estimar la funció de distribució acumulada complementària, definida com la probabilitat de tenir magnitud més gran o igual que un cert valor M . Com



Beno Gutenberg



Charles Richter

Els sismòlegs Beno Gutenberg i Charles F. Richter
(fotos extretes de seismo.berkeley.edu).

que aquesta magnitud resulta ser exponencial, proporcional a 10^{-bM} , la seva derivada també ho serà, i aquesta és, excepte un signe, la funció de densitat. En equacions,

$$D_M(M) = -\frac{d}{dM}P(\text{magnitud} \geq M) \propto \frac{d10^{-bM}}{dM} \propto 10^{-bM}.$$

Però quin és el significat de la llei de Gutenberg-Richter, a més de proporcionar una regla fàcil de recordar per a les abundàncies relatives dels terratrèmols? La interpretació depèn, òbviament, del sentit del terme *magnitud*, que fins ara hem evitat definir. De fet, la magnitud no és una variable física adequada —al cap i a la fi, no té unitats. Per a aprofundir una mica més, és preferible fixar-se en l'energia E radiada per un terratrèmol, que és una funció exponencial de la seva magnitud [17], és a dir,

$$E \propto 10^{3M/2},$$

de manera que un augment d'1 en la magnitud suposa un augment en energia d'un factor $\sqrt{1000} \simeq 32$. Això significa que un terratrèmol de magnitud 9 radia tanta energia com 1000 terratrèmols de magnitud 7, o 10^6 de magnitud 5.

Ara podem reformular la llei de Gutenberg-Richter en termes de l'energia. De fet, la probabilitat d'un esdeveniment és «independent» de la variable que s'usi per a descriure'l, i per tant, per un senzill canvi de variables,

$$D_E(E) = D_M(M) \frac{dM}{dE},$$

on $D_E(E)$ és la funció de densitat de l'energia. Aquest canvi de variables implica que

$$D_E(E) \propto \frac{1}{E^\alpha},$$

on

$$\alpha = 1 + \frac{2b}{3},$$

i aquesta és la famosa distribució de potències, o distribució de Pareto [22], amb exponent α al voltant d'1.67 quan b és proper a 1. Observeu que perquè $D_E(E)$ sigui realment una funció de densitat cal que estigui definida només per sobre d'un valor mínim d'energia $E_{\min} > 0$ ja que en cas contrari (si $E_{\min} = 0$) no pot normalitzar-se. A la pràctica, aquest valor no es pot mesurar (és massa petit), però això no és un problema, ja que realment no hi ha cap propietat dels terratrèmols que en depengui.

La figura 1 mostra la funció de densitat del moment sísmic per a terratrèmols d'arreu del món [16]; aquesta variable es considera proporcional a l'energia (però és molt més fàcil de mesurar), i per tant també hauria de tenir una distribució de potència amb el mateix exponent. La línia recta és, òbviament, el tret que caracteritza les lleis de potències en escala logarítmica doble, ja que $\log D_E(E) = C - \alpha \log E$.

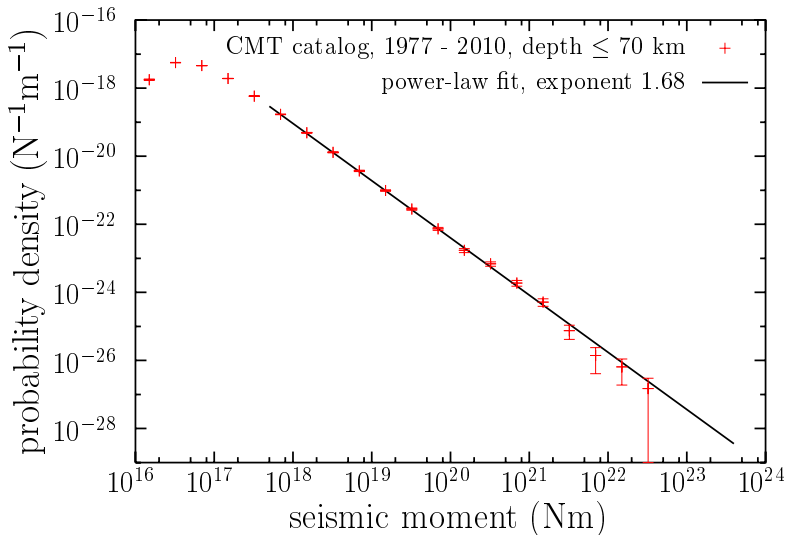


FIGURA 1: Estimació de la funció de densitat del moment sísmic per a terratrèmols superficials d'arreu del món, utilitzant el catàleg conegut per CMT [16]. L'ajustament d'una llei de potències dóna un exponent $\alpha = 1.68$. L'energia radiada hauria de tenir el mateix comportament de llei de potències. Les desviacions per a valors petits del moment sísmic s'atribueixen a la no completesa del catàleg.

1.2 Propietats de les distribucions tipus lleis de potències

Algunes propietats d'aquestes distribucions mereixen atenció especial. D'entrada, podem calcular-ne la mitjana, és a dir, el valor esperat de E , que ve donat per

$$\langle E \rangle = \int_{E_{\min}}^{\infty} E D_E(E) dE.$$

Observeu que denotem el valor esperat per $\langle E \rangle$, tal com fan els físics i no per $E[E]$, com farien els probabilistes. La raó és que estem més interessats en les aplicacions, on la primera opció és la més habitual. Es fàcil comprovar que, en el cas de l'energia dels terratrèmols, aquesta integral divergeix i, per tant, en rigor, el valor esperat de l'energia és infinit. Aquesta divergència és deguda al fet que l'exponent de la llei de potències és més petit que 2. Òbviament l'energia que, de mitjana, radia un terratrèmol no pot ser infinita (al cap i a la fi, la Terra conté una quantitat finita d'energia), per tant hi deu haver algun problema en extrapolar la llei de potències fins a l'infinit. Si tinguéssim una distribució normal, o una exponencial, podríem extrapolar-la fins a l'infinit sense cap por, perquè la integral no divergiria. Però cal remarcar que estem davant d'un problema físic, no matemàtic —si la nostra variable fos, per exemple, el temps d'espera entre esdeveniments, el temps mitjà podria perfectament ser infinit.

Per tant, per raons físiques, ha d'existir una fita superior per a la validesa de la llei de Gutenberg–Richter; però no tenim ni idea del valor d'aquesta fita. A la pràctica, el fet que el valor esperat de l'energia divergeixi implica que les mitjanes de l'energia que es poden calcular usant conjunts finits de dades no convergeixen, sigui quin sigui el nombre de dades. En resum, els sismòlegs ignoren completament quina és l'energia mitjana radiada pels terratrèmols, a causa de les propietats inusuals de les lleis de potències.

Tot i que en començar aquest article hem interpretat positivament el fet que la major part de terratrèmols són petits, i només uns quants són devastadors, la situació certament no és tan favorable. El problema és que els esdeveniments rars i grans, tot i ser molt pocs, són els responsables de la dissipació d'energia en el sistema. Per al valor particular de α que tractem, és fàcil verificar que l'ordre de magnitud més gran que es consideri (la dècada més gran) contribueix més al total que totes les que té per sota juntes. Matemàticament,

$$\int_{E_{\min}}^c E D_E(E) dE < \int_c^{10c} E D_E(E) dE,$$

sigui quin sigui el valor de c . Podeu trobar la demostració a l'apèndix.

Una altra propietat curiosa de les lleis de potències és la invariància d'escala. Per a introduir el concepte de transformació d'escala considerem primer una funció qualsevol que anomenarem $D(E)$. La idea d'una transformació d'escala és mirar la funció $D(E)$ a una altra escala, com si tinguéssim un microscopi matemàtic. Podríem tenir una visió de $D(E)$ a l'escala de metres (si E i $D(E)$ fossin distàncies) i tractar d'esbrinar quin aspecte té a l'escala de centímetres.

Per a fer-ho, utilitzem una transformació d'escala, que denotem amb l'operador T actuant sobre $D(E)$,

$$T(D(E)) = c_2 D(E/c_1),$$

on c_1 i c_2 són els anomenats paràmetres d'escala, responsables de les transformacions lineals en E i D . En el cas de metres-centímetres, per exemple, tindriem $c_1 = c_2 = 100$.

En general, gairebé totes les funcions canvien sota una transformació d'escala; si volem trobar l'excepció, hem de determinar la funció o funcions que compleixen la condició següent:

$$D(E) = c_2 D(E/c_1).$$

És trivial comprovar que la solució és la llei de potències

$$D(E) \propto \frac{1}{E^\alpha}$$

amb α donat per

$$\alpha = -\frac{\ln c_2}{\ln c_1}.$$

És a dir, una llei de potències amb exponent α no canvia sota una transformació d'escala si els factors d'escala mantenen la relació

$$c_2 = \frac{1}{c_1^\alpha}.$$

La figura 2 il·lustra aquesta situació, amb $c_1 = 10$, $c_2 = \sqrt{10}$, i $D(E) = \sqrt{E}$. Cal destacar que la constant de proporcionalitat, que de fet està continguda en el símbol \propto , no té cap paper en aquestes relacions.

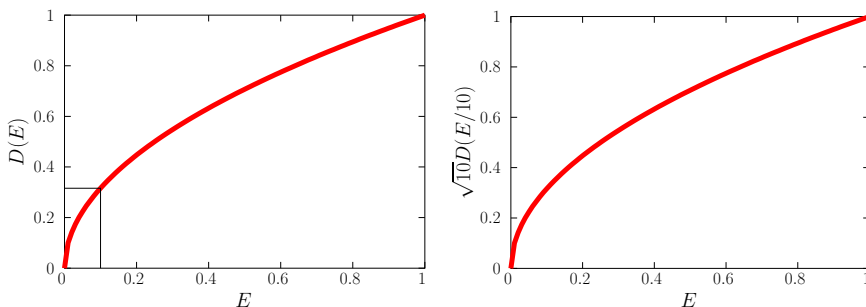


FIGURA 2: Una transformació d'escala actuant sobre la seva corresponent funció amb invariància d'escala. La funció s'expandeix en els factors $c_1 = 10$ i $c_2 = \sqrt{10}$, de tal manera que el petit rectangle de la part esquerra de la figura esdevé la part dreta sencera. La funció en qüestió és $D(E) = \sqrt{E}$.

Encara més, no solament es pot demostrar que la llei de potències és una solució, sinó que és l'única solució vàlida per a tots els valors de c_1 (reals positius) si c_1 i c_2 mantenen la relació anterior [22, 6]. En resum, la condició d'invariància d'escala imposa que

$$D(E) = c_2 D(E/c_1) \text{ per a tots els } c_1 \text{ reals positius}$$

i, aleshores, l'única solució possible és una llei de potències. Es pot verificar que altres solucions, com per exemple $D(E) = \sin(\ln E)$, només funcionen per a uns valors determinats de c_1 i c_2 .

La invariància d'escala és, de fet, la simetria associada a les transformacions d'escala, així com la invariància rotacional és la simetria corresponent a les rotacions. Si tenim invariància d'escala no podem definir una escala característica per a la variable E , de manera anàloga al fet que, si tenim invariància rotacional en un sistema, no el podem fer servir per a senyalar direccions. El sistema on *no* hi ha invariància d'escala permeten definir escales característiques, com per exemple les funcions exponencials que defineixen la desintegració radioactiva, que permeten definir la unitat de temps en termes de la semivida.

De tota manera, cal remarcar un punt important: si $D(E)$ representa una densitat de probabilitat, com en el cas de l'energia radiada pels terratrèmols, aleshores $D(E)$ no pot ser una llei de potències per a tot $E \geq 0$, perquè aleshores no podria normalitzar-se (la integral de 0 a ∞ divergiria). Com ja hem dit, cal introduir una fita inferior de validesa E_{\min} per evitar aquesta situació. A més, també hem vist que la llei no pot estendre's fins a l'infinit per raons físiques. Per tant, la invariància d'escala absoluta no és possible entre les distribucions de probabilitat; només es pot aspirar a una invariància d'escala restringida. Ara bé, com que en el cas dels terratrèmols cap de les fites, la superior i la inferior, no es pot obtenir a partir d'observacions, la invariància d'escala sí que exerceix un paper real.

La invariància d'escala en l'energia dels terratrèmols té conseqüències anti-intuïtives. Imaginem, per exemple, que arribem a un país, i estem preocupats pels terratrèmols. Aleshores decidim acostar-nos a algú i fer-li la pregunta següent: *com són de grans els terratrèmols, aquí?* Tot i que pot semblar una pregunta molt innocent, a causa de la invariància d'escala no es pot definir una escala característica per a l'energia i, per tant, la pregunta no pot tenir resposta.

Per acabar aquesta subsecció volem remarcar que la distribució en llei de potències no és una característica solament dels terratrèmols: s'ha afirmat que molts altres desastres naturals estan distribuïts segons una llei de potències, tot i que l'exponent pot variar: tsunamis [5], esllavissaments i caigudes de roques [19], erupcions volcàniques [21], huracans [8], pluja [27], aurores [9], incendis forestals [20], flamarades solars [3], cràters de meteorits (a la Lluna) [3]...

Tal com el lector ja s'imagina, part del que explicarem a continuació pensant en els terratrèmols també es pot aplicar a alguns d'aquests fenòmens, però potser no a tots. De fet, és un problema obert distingir entre aquests casos. Per a un recull de lleis de potència en altres àmbits, a més de la geociència, recomanem [22].

1.3 Un primer model de generació de terratrèmols

El primer intent que coneixem de desenvolupar un model per als terratrèmols que expliqui la llei de Gutenberg-Richter va ser obra de Michio Otsuka als inicis de la dècada de 1970 [23, 24, 18]. Otsuka utilitzava com a metàfora el joc xinès del go, però nosaltres presentarem el model fent referència al dòmino, que serà més familiar per als lectors (i per als autors!). En lloc de jugar al dòmino de veritat, en farem servir les peces per jugar a un altre joc. Es tracta de veure si les peces, posades dretes, fan caure les unes a les altres, com en els famosos concursos i intents de superar el rècord Guinness, però amb dues diferències substancials. Primer, les peces no es disposen en fila, sinó que formen una espècie d'arbre. Segon, quan una peça cau, no sabem què passarà a continuació, si farà caure alguna altra peça o no, ni quantes. És a dir, que tenim un procés estocàstic en cascada que, en principi, imita les ruptures que tenen lloc a les falles sísmiques durant un terratrèmol. L'arbre de peces de dòmino fa el paper de falla, i cada peça correspon a un petit fragment de falla, o element. El terratrèmol, al seu torn, correspon a la successió de peces que cauen (és a dir, fragments que es trenquen i llisquen).

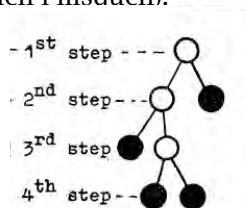


FIGURA 3: Representació esquemàtica del model d'Otsuka per a ruptures en terratrèmols. Els cercles blancs representen la propagació de la ruptura, i els negres indiquen punts terminals [24].

Concretament, Otsuka va suposar que l'arbre que representava la falla tenia un nombre fix de branques a cada posició o node, i que les caigudes es propagaven d'una branca a l'element següent amb una probabilitat fixa, independentment de qualsevol altra variable. Per exemple, en la figura 3 el nombre de branques per element és 2. Així, el nombre total de postcaigudes o ramificacions originades per un sol element seguiria una distribució binomial [29]. Si associem una certa quantitat fixa elemental d'energia al lliscament de cada element, podem obtenir l'energia alliberada en aquest procés a partir del nombre total d'elements que llisquen, i això permetria comparar la distribució d'energia al model amb la llei de Gutenberg-Richter.

Per tant, la propagació de ruptures es considera un fenomen probabilístic, en el sentit que quan comença un terratrèmol no és possible saber com arribarà a ser de gran. Després veurem que aquesta afirmació és molt més forta del que ara ens sembla. El típic *efecte dòmino*, on una caiguda sempre indueix la següent, correspondria al polèmic concepte de terratrèmol característic, un esdeveniment que es propaga sempre al llarg de tota la falla o sistema de falles i que, per tant, sempre alliberaria la mateixa quantitat d'energia. Així, ha de quedar clar que l'efecte dòmino no es correspondria amb el nostre model.

És molt significatiu que el model que acabem d'explicar, novedós i original en geofísica, introduït per Otsuka als anys setanta, ja era conegut per alguns matemàtics més de cent anys abans. Esmerçarem les properes pàgines a explicar la distribució d'energia del model.

2 El procés de Galton-Watson

A part de les apostes, molts probabilistes també s'han interessat en la reproducció.

G. Grimmett i D. Stirzaker

Ens traslladem ara a l'Anglaterra victoriana del segle XIX. Allà, Sir Francis Galton, polímata, pare dels conceptes estadístics de correlació i regressió i cosí de Charles Darwin, s'ocupava d'afers molt diversos. A més d'estudiar l'estatura dels fills en relació amb la dels pares, també estava preocupat pel declivi, i fins i tot l'extinció, de les famílies prominents de l'època, i per si aquest declivi era conseqüència d'una disminució de la fertilitat provocada per l'augment del confort. Si això fos així, aleshores la població es mantindria per la contribució de les classes populars [34]. Per a entendre millor el problema, va crear un model mínim on el nombre de fills varons de cada home era aleatori (en aquella època, l'abundància de dones no es considerava un problema). Tot i l'aparent simplicitat del model, Galton no va poder resoldre'l, i va decidir fer una crida pública d'ajuda (un cas precursor, segons com, del que actualment es coneix com a intel·ligència distribuïda). La crida no va fructificar, i Galton es va adreçar al matemàtic i reverend Henry William Watson.



Sir Francis Galton



Rev. Henry William Watson

Els pares del procés de Galton-Watson (fotos extretes de la Wikipedia i de www.wolframalpha.com, respectivament).

2.1 Definició del procés de Galton-Watson

Considerem uns «elements» que poden generar uns altres elements, i així successivament. Aquests elements poden representar homes de l'aristocràcia britànica que tenen descendents masculins —o, en una reinterpretació més actual, dones d'arreu que donen a llum les seves filles; o potser més apropiadament bacterïes que es repliquen—, neutrons que emeten d'altres neutrons en una reacció nuclear en cadena o fragments de falles que llisquen durant un terratrèmol. El procés de Galton-Watson pressuposa que cadascun d'aquests elements dóna lloc a un nombre aleatori K d'elements nous, descendents de l'anterior, de tal manera que cada K és independent de la dels altres elements, i totes les K 's estan idènticament distribuïdes, amb probabilitats $P(K = 0) = p_0$, $P(K = 1) = p_1, \dots, P(K = k) = p_k, \dots$, amb $k = 0, 1, 2 \dots$ [12, 15]. (Naturalment, la condició de normalització imposa que $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$.)

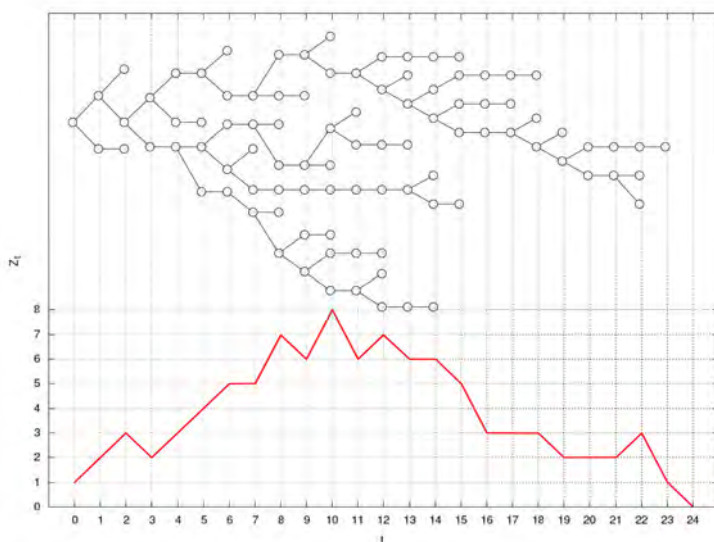


FIGURA 4: Una realització del procés de Galton-Watson. A dalt es mostra l'arbre associat al procés, començant per l'esquerra ($Z_0 = 1$). A sota, l'evolució del nombre d'elements nascuts a cada generació t . El model és binomial per a $P(K = k)$, amb $n = 2$ i $p = 1/2$, cosa que correspon al cas crític.

El model parteix inicialment d'un únic element, que s'anomena la generació 0 del procés, tal com mostra la figura 4. Els K descendents d'aquest primer element constitueixen la primera generació. Sigui $Z_0 = 1$ el nombre d'elements de la generació 0, Z_1 el nombre d'elements de la generació 1, etc. Òbviament, per construcció $P(Z_1 = k) = p_k$. El nombre d'elements de la generació $t + 1$ s'obté

a partir de l'anterior mitjançant

$$Z_{t+1} = \sum_{i=1}^{Z_t} K_i,$$

amb $t \geq 0$, on K_i correspon al nombre de descendents de cada element de la generació t . Aquesta equació senzilla pot usar-se directament per simular el procés, i serà molt important també en el tractament analític del model (per exemple, quan calculem la distribució de probabilitat de Z_t per a un t qualsevol). Alguns lectors probablement s'han adonat que les variables Z_0, Z_1, \dots formen una cadena de Markov, però això no tindrà cap rellevància per al que ens interessa.

2.2 Funcions generatrius

Una eina matemàtica extremament útil serà la funció generatriu de probabilitats [10]. Aquesta es defineix, per a la variable aleatòria K , com

$$f_K(x) \equiv \sum_{k=0}^{\infty} p_k x^k = \langle x^K \rangle,$$

on els claudàtors angulars indiquen valor esperat. La condició de normalització ens garanteix que $f_K(x)$ sempre està definida, com a mínim, a l'interval $[-1, 1]$, tot i que a nosaltres només ens interessarà l'interval $[0, 1]$.

Òbviament, la mateixa definició s'aplica a qualsevol altra variable aleatòria que prengui valors enters no negatius; en el cas particular de K (que representa el nombre de descendents d'un element) podem ometre el subíndex, és a dir, escriure $f_K(x) = f(x)$. Algunes propietats simples i útils són les següents:

1. $f_K(0) = P(K = 0)$;
2. $f_K(1) = 1$ (normalització);
3. $f'_K(1) = \sum_k p_k k = \langle K \rangle \equiv m$;
4. $f'_K(x) \geq 0$ per $x \geq 0$ (funció no decreixent);
5. $f''_K(x) \geq 0$ per a $x \geq 0$ (funció no convexa mirant-la «des de dalt»);

on les primes denoten derivades (derivades per l'esquerra a $x = 1$), i on la propietat 3 òbviament només té sentit quan el primer moment no divergeix. Cal recordar que, tot i que estem il·lustrant aquestes propietats per a la variable aleatòria K , són vàlides per a qualsevol funció generatriu. Per tant, la gràfica d'una funció generatriu entre 0 i 1 està força condicionada. Ja podem anticipar que ens trobarem dos grans casos, segons si el valor esperat de K és $m < 1$ o $m > 1$. Això és molt natural, ja que el primer cas correspon a una població que, de mitjana, disminueix d'una generació a la següent, i en canvi en el segon cas la població, de mitjana, creix.

Una altra propietat, potser no tan directa, és que la funció generatriu de la suma de N variables independents i idènticament distribuïdes, K_i (amb N fixat),

és la potència enèsima de la funció generatriu de K . És a dir, que si

$$\Sigma = \sum_{i=1}^N K_i,$$

aleshores

$$f_{\Sigma}(x) = f_K(x)^N.$$

De fet,

$$\begin{aligned} f_{\Sigma}(x) &= \langle x^{\Sigma} \rangle = \langle x^{\sum K_i} \rangle = \langle x^{K_1} \cdot x^{K_2} \cdot \dots \cdot x^{K_N} \rangle = \\ &= \langle x^{K_1} \rangle \langle x^{K_2} \rangle \cdot \dots \cdot \langle x^{K_N} \rangle = f_K(x)^N, \end{aligned}$$

on els valors esperats factoritzen a causa de la independència estadística entre les diferents K_i .

En general, si les variables aleatòries no fossin idènticament distribuïdes (però sí independents), la funció generatriu de la seva suma seria el producte de les corresponents funcions generatrius. La demostració, de fet, és essencialment la mateixa: només cal modificar la notació per diferenciar les diverses funcions generatrius.

El pas següent consisteix a considerar que N també és una variable aleatòria, independent de K , amb funció generatriu $f_N(x)$. Aleshores,

$$f_{\Sigma}(x) = f_N(f_K(x)).$$

Observeu que aquesta fórmula no és més que una generalització de l'anterior, és a dir, ara calculem el valor esperat de potències de $f_K(x)$ que depenen dels valors que N pot prendre. En qualsevol cas, és fàcil de demostrar: si denotem el valor esperat respecte les K_i per $\langle \cdot \rangle_{K_i}$, i el valor esperat respecte N per $\langle \cdot \rangle_N$, tenim que

$$f_{\Sigma}(x) = \langle x^{\Sigma} \rangle = \langle \langle x^{\Sigma} \rangle_{K_i} \rangle_N = \langle f_K(x)^N \rangle_N = f_N(f_K(x)),$$

on la darrera igualtat és simplement la definició de la funció generatriu de probabilitat de la variable aleatòria N , avaluada al punt $f_K(x)$. Remarquem, però, que aquest argument necessita la condició d'independència.

2.3 Distribució del nombre d'elements per generació

Si ara recuperem el procés de Galton-Watson, és a dir, fem servir que $Z_{t+1} = \sum_{i=1}^{Z_t} K_i$, podem identificar Z_{t+1} amb Σ i Z_t amb N . Per tant,

$$f_{Z_{t+1}}(x) = f_{Z_t}(f_K(x)) = f_{Z_t}(f(x)),$$

obviant el subíndex K . Com que $f_{Z_1}(x) = f(x)$, es pot veure per inducció que la funció generatriu de Z_t ve donada per

$$f_{Z_t}(x) = f(f(\dots f(x))) = f^t(x),$$

on el superíndex t denota composició t vegades. Això és vàlid per a $t = 1, 2, \dots$; per a $t = 0$ tenim, òbviament, que $f_{Z_0}(x) = x$ (ja que $Z_0 = 1$ amb probabilitat 1). En resum, la funció generatriu del nombre d'elements de cada generació s'obté mitjançant composicions successives de la funció $f(x)$. Aquest resultat no elemental el va provar per primer cop Watson l'any 1874 [12].

2.4 El nombre esperat d'elements per generació

Ara presentem un resultat certament il·luminador, que ens farà servei més endavant. Tot i que, generalment, les composicions successives de la funció generatriu porten a expressions matemàtiques molt complicades, els moments de Z_t es poden computar d'una altra manera, molt més senzilla [12]. Fent servir la propietat 3 de la pàgina 15 i la composició de funcions generatrius, tenim que el valor esperat de Z_t és

$$\langle Z_t \rangle = \left. \frac{d}{dx} f^t(x) \right|_{x=1}.$$

Si escrivim

$$\frac{d}{dx} f^t(x) = \frac{d}{dx} f(f^{t-1}(x)) = f'(f^{t-1}(x)) \frac{d}{dx} f^{t-1}(x),$$

aleshores, per inducció

$$\frac{d}{dx} f^t(x) = f'(f^{t-1}(x)) f'(f^{t-2}(x)) \cdots f'(f^2(x)) f'(f(x)) f'(x).$$

Prenent $x = 1$, i observant que en aquest punt totes les funcions generatrius valen 1, arribem a

$$\langle Z_t \rangle = f'(1)^t = m^t.$$

Per tant, quan $m < 1$ el nombre esperat d'elements per generació decreix exponencialment, i en canvi quan $m > 1$ aquest nombre creix. Això constitueix, de fet, una realització estocàstica del creixement malthusià. És per això que, de vegades, m s'anomena la raó de ramificació. Quan $m = 1$ la mida mitjana de la població és constant, però després veurem que això no implica que la població assoleixi un estat estable. Els moments d'ordre superior es poden calcular de manera similar, però no són tan útils com la mitjana.

També és interessant estudiar el valor esperat del nombre d'elements d'una generació condicionat al valor de la generació anterior, és a dir, $\langle Z_{t+1} | Z_t = z_t \rangle$. Com que quan Z_t és fix, $Z_{t+1} = \sum_{i=1}^{Z_t} K_i$, prenent el valor esperat tenim que

$$\langle Z_{t+1} | Z_t = z_t \rangle = z_t m.$$

Aquest resultat pot usar-se per relacionar els processos de ramificació amb les martingales [10], però això ara no ens ha de preocupar.

2.5 La probabilitat d'extinció

El procés de Galton-Watson es considera extingit quan $Z_t = 0$ per primera vegada (és a dir, per a la generació que dona lloc a $Z_t = 0$ per primer cop). Aleshores, totes les Z 's posteriors són òbviament també zero, i en aquest sentit l'extinció es pot considerar un «estat absorbent» del sistema. Ara veurem que, per al procés de Galton-Watson, la probabilitat d'extinció és 1 (extinció segura) per a $m \leq 1$, i en canvi és més petita que 1 quan $m > 1$. Això ho va demostrar per primer cop J. F. Steffensen cap al 1930 [12]. De fet, l'extinció es pot donar a la primera generació, $Z_1 = 0$, o a la segona, $Z_2 = 0$, etc. Com $\{Z_t = 0\}$ inclou tots els esdeveniments $\{Z_i = 0\}$ per a $i = 1, \dots, t$, aleshores $P(Z_1 = 0, \dots, Z_t = 0) = P(Z_t = 0)$. Per tant, la probabilitat d'extinció P_{ext} ve donada per

$$P_{\text{ext}} = \lim_{t \rightarrow \infty} P(Z_1 = 0 \text{ o } Z_2 = 0 \text{ o } \dots \text{ o } Z_t = 0) = \lim_{t \rightarrow \infty} P(Z_t = 0) = \lim_{t \rightarrow \infty} f^t(0),$$

és a dir, per la iteració infinita del punt $x = 0$ a través de la funció generatriu $f(x)$ (aquí, de fet, fem servir que la probabilitat del valor 0 és el valor de la funció generatriu al punt 0, i que la funció generatriu de Z_t ve donada per la t -èsima composició de $f(x)$).

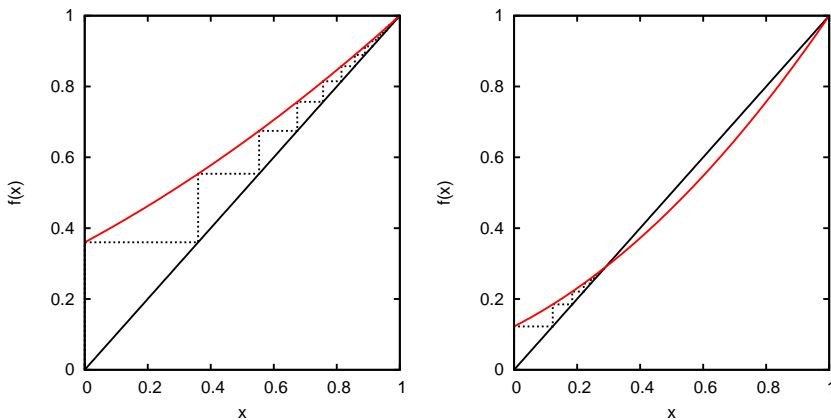


FIGURA 5: Funció generatriu de probabilitats $f(x)$ del nombre de descendents per element i iteració del punt $x = 0$ mitjançant les successives composicions de $f(x)$. Els punts fixos corresponen als punts de tall amb la diagonal; els més propers a zero són també atractors. A l'esquerra, cas subcrític. A la dreta, cas supercrític. El model és binomial, amb $n = 2$.

Calculem ara la iteració $f^t(0)$. A l'interval $[0, 1]$ la funció $f(x)$ és no decreixent i no convexa (mirada des de dalt) i només pren valors entre p_0 i 1. Si el pendent de $f(x)$ a $x = 1$, que ve donat per $m = \langle K \rangle = f'(1)$, és més petit o igual que 1, aleshores $f(x)$ només pot tallar (o tocar) la diagonal a $x = 1$ (si no, $f(x)$ hauria de ser convexa en algun punt), i la iteració del punt $x = 0$ acaba al

punt $x = 1$ (que és l'atractor; vegeu la figura 5). En conseqüència,

$$P_{\text{ext}} = \lim_{t \rightarrow \infty} f^t(0) = 1,$$

és a dir, l'extinció és inevitable si $m \leq 1$. De tota manera, hi ha una excepció trivial, que correspon al cas patològic $p_1 = 1$ (i 0 per a la resta); es tracta d'una situació molt ensopida, on tot element té sempre un únic descendent (pot correspondre, per exemple, a la successió de reis o reines en una monarquia, si no tenim en compte les revolucions). En aquest cas, $f(x) = x$, i per tant $\lim f^t(0) = 0$, cosa que implica, òbviament, que la probabilitat d'extinció és zero.

Si el pendent de $f(x)$ a $x = 1$ és $m > 1$ (cosa que només pot passar per a una funció generatriu de probabilitats no lineal, és a dir, $p_0 + p_1 < 1$), aleshores $f(x)$ ha de tallar la diagonal en algun punt x^* més petit que 1, que serà l'atractor al qual la iteració tendeix (vegeu novament la figura 5). Matemàticament,

$$P_{\text{ext}} = \lim_{t \rightarrow \infty} f^t(0) = x^*,$$

on

$$x^* = f(x^*) \text{ amb } x^* < 1.$$

La demostració es desenvolupa amb més detall a l'apèndix. En resum,

$$P_{\text{ext}} = \begin{cases} 1 & \text{si } m \leq 1 \\ x^* & \text{si } m > 1 \end{cases}$$

amb $x^* < 1$, excepte en el cas trivial $p_1 = 1$, on $m = 1$ però $P_{\text{ext}} = 0$.

Això mostra clarament com, en general, el punt $m = 1$ separa dos comportaments diferents: extinció assegurada per a $m \leq 1$, i la possibilitat de supervivència (extinció no assegurada) per a $m > 1$. Per tant, $m = 1$ correspon al cas crític que separa aquests dos comportaments, anomenats conseqüentment subcrític ($m < 1$) i supercrític ($m > 1$).

2.6 La probabilitat d'extinció per al cas binomial

Per a posar un exemple il·lustratiu, considerarem un cas concret i senzill: una distribució binomial [10, 29],

$$p_k = P(K = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}, \quad \text{per a } k = 0, \dots, n.$$

Això correspon a suposar que cada element disposa només d'un cert nombre n d'intents de generar descendència, i que cadascun d'aquests intents té una probabilitat fixa p de ser exitós. Resulta que, fent servir el teorema binomial, la funció generatriu de probabilitat pren la forma següent:

$$f(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (1-p)^{n-k} p^k x^k = (1-p + px)^n.$$

Considerem com a exemple el cas més simple, $n = 2$, i definim $q = 1 - p$. Com ja hem vist, la probabilitat d'extinció vindrà donada per la solució més petita a $[0, 1]$ de

$$x = (q + px)^2.$$

Per tant,

$$x = \frac{1 - 2pq \pm \sqrt{(1 - 2pq)^2 - 4p^2q^2}}{2p^2},$$

però l'arrel quadrada es pot escriure $\sqrt{1 - 4p(1 - p)} = \sqrt{(1 - 2p)^2} = (1 - 2p)$, i aleshores,

$$x = \frac{1 - 2p + 2p^2 \pm (1 - 2p)}{2p^2} = \begin{cases} \left(\frac{q}{p}\right)^2 \\ 1 \end{cases}.$$

Per tant, l'arrel més petita depèn de si p està per sobre o per sota de $1/2$:

$$P_{\text{ext}} = \begin{cases} 1 & \text{per a } p \leq \frac{1}{2} \\ \left(\frac{q}{p}\right)^2 & \text{per a } p \geq \frac{1}{2} \end{cases}.$$

Com que (per a la distribució binomial amb $n = 2$) el valor esperat és $m = 2p$, el cas crític $m = 1$ correspon òbviament a $p = 1/2$, cosa que encaixa amb el comportament de P_{ext} .

2.7 Inestabilitat de la població

Tot i que aquesta subsecció conté un resultat molt interessant que pot ajudar a entendre el comportament d'un procés de Galton-Watson, es pot saltar, ja que no és necessària per a llegir la resta de l'article.

La iteració del punt $x = 0$, de fet, és il·lustrativa del que li passa a tota la funció generatriu de Z_t quan $t \rightarrow \infty$. De fet, de la mateixa manera que a la subsecció 2.5, podríem comprovar que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_{Z_t}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} f^t(x) = 1 \text{ si } m \leq 1,$$

però en canvi

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f_{Z_t}(x) = \lim_{t \rightarrow \infty} f^t(x) = x^* < 1 \text{ si } m > 1,$$

excepte per a $x = 1$ (vegeu la figura 6).

Recordem que una funció generatriu plana correspon a probabilitats iguals a zero, excepte per al valor zero, és a dir,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(Z_t = k) = 0, \text{ excepte per a } k = 0.$$

Així, per a $m \leq 1$, tenim que $\lim_{t \rightarrow \infty} P(Z_t = 0) = 1$, i la població s'extingeix, però per a $m > 1$ hem vist que $\lim_{t \rightarrow \infty} P(Z_t = 0) = x^* < 1$; i com que qualsevol

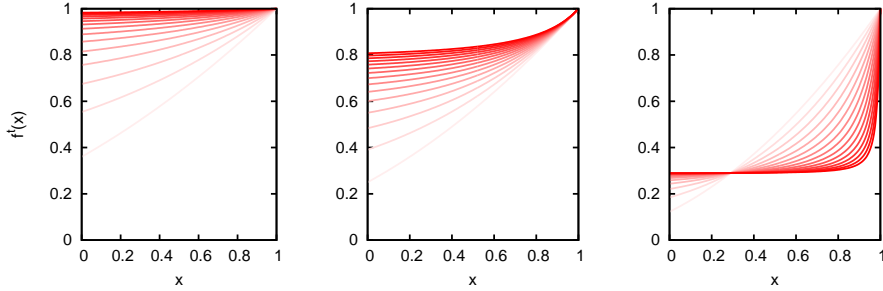


FIGURA 6: Composicions successives de la funció $f(x)$, per a tot x , que donen lloc a la funció generatriu de probabilitats de Z_t , començant per $t = 1$ (línia més clara) fins a $t = 15$ (línia més fosca). Quan t creix s'obtenen funcions més planes, cada cop més a prop del punt fix. D'esquerra a dreta, casos subcrític, crític i supercrític, per a un model binomial amb $n = 2$.

altre valor finit de K té probabilitat zero, això implica que $Z_t \rightarrow \infty$ quan $t \rightarrow \infty$, és a dir, que Z_t no pot mantenir-se positiva i fitada: l'únic estat estable és l'extinció. Òbviament, el procés de Galton-Watson en aquest límit no és realista, en el sentit que altres factors externs podrien evitar que la població creixés indefinidament. Però això no ens ha de preocupar, sempre que tinguem clares les limitacions del model.

2.8 Transició de fase de no-equilibri

Passem ara a analitzar més detalladament què succeeix al voltant del «punt de transició» ($m = 1$). Tal com acabem de veure, la probabilitat d'extinció ve donada per la solució de $P_{\text{ext}} = f(P_{\text{ext}})$. Quan $m \leq 1$, l'única solució a $[0, 1]$ és $P_{\text{ext}} = 1$ (excepte per al cas trivial $p_1 = 1$). Quan $m > 1$, hem de prendre la solució més petita de $P_{\text{ext}} = f(P_{\text{ext}})$ a $[0, 1]$. Reescrivint-ho tot en termes de la probabilitat de no-extinció, $\rho = 1 - P_{\text{ext}}$, hem de trobar el valor de ρ més gran que sigui solució de

$$f(1 - \rho) = \sum_{k=0}^{\infty} p_k (1 - \rho)^k = 1 - \rho$$

a l'interval $[0, 1]$. Ens centrem en el cas on P_{ext} és proper a 1, i per tant ρ és proper a zero, i, usant el teorema binomial, trobem l'expansió $(1 - \rho)^k = 1 - k\rho + k(k - 1)\rho^2/2 + \dots$, la qual ens condueix a

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} p_k - \sum_{k=0}^{\infty} k p_k \rho + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} k(k - 1) p_k \rho^2 + \dots = \\ = 1 - m\rho + \frac{1}{2} \mu \rho^2 + \dots = 1 - \rho, \end{aligned}$$

on hem introduït la mitjana m i el segon moment factorial $\mu = \langle K(K-1) \rangle$, que suposem que existeixen i són finits (per tant, suposem que els moments de tots els ordres són finits). Així doncs, fins a segon ordre en ρ , hem de resoldre

$$\left(\frac{1}{2}\mu\rho + 1 - m\right)\rho \simeq 0.$$

Òbviament, una solució és $\rho = 0$, i de fet és fàcil veure que aquesta solució és exacta per a qualsevol ordre en ρ . L'altra solució és $\rho \simeq 2(m-1)/\mu$, però cal parar atenció al valor de μ , que pot escriure's $\mu = \sigma^2 + m(m-1)$, amb $\sigma^2 = \langle (K-m)^2 \rangle = \langle K^2 \rangle - m^2$, és a dir, la variància. Suposant que $\sigma^2 \neq 0$,

$$\frac{2(m-1)}{\mu} = \frac{2(m-1)}{\sigma^2[1 + m(m-1)/\sigma^2]} = \frac{2(m-1)}{\sigma^2} \left[1 - \frac{m(m-1)}{\sigma^2} + \dots\right]$$

(on hem usat la fórmula de la suma d'una sèrie geomètrica), amb $m(m-1) < \sigma^2$ si ens trobem suficientment a prop del punt crític, i per tant com que ρ al voltant de zero implica m al voltant d'1, podem escriure la segona solució de la manera següent

$$\rho \simeq \frac{2(m-1)}{\sigma^2},$$

que es troba al rang que ens interessa per a $m > 1$.

En resum, tenim que

$$\begin{aligned} \rho &= 0 && \text{si } m \leq 1, \\ \rho &\simeq 2(m-1)/\sigma^2 && \text{si } m > 1, \end{aligned}$$

si ρ és prou petita. Per a $m > 1$, aquest límit és equivalent a $m \rightarrow 1$. El cas particular de $\sigma^2 = 0$, de fet, només es dona per a la solució trivial on $p_1 = 1$ (altrament, la mitjana no podria acostar-se a 1).

Així, hem obtingut un comportament anàleg al d'una transició de fase contínua en equilibri termodinàmic, on la variació d'un paràmetre de control, per exemple la temperatura, indueix un canvi bruscat (continu però amb derivada discontinua) en un «paràmetre d'ordre», diguem-ne la magnetització en l'exemple d'un sistema magnètic. Identificant m amb el paràmetre de control (la temperatura o, essent més exactes, l'invers de la temperatura) i ρ amb el paràmetre d'ordre (la magnetització), i pensant en ρ com a funció de m , podem escriure aquesta relació de la mateixa manera que es fa a les transicions de fase, on m_c representarà el punt de transició,

$$\begin{aligned} \rho &= 0 && \text{per sota de } m_c, \\ \rho &\propto (m - m_c)^\beta && \text{per sobre però a prop de } m_c. \end{aligned}$$

Seguint amb l'exemple dels sistemes magnètics, m_c correspondria a la famosa temperatura de Curie, el valor precís de la temperatura per al qual té lloc la transició abrupta, que separa una fase no magnètica, per a temperatures

altes, d'una fase magnètica (o ferromagnètica, amb magnetització espontània no nul·la) per a temperatures baixes. Acabem de demostrar que el procés de Galton-Watson s'ajusta a aquesta fenomenologia, amb

$$m_c = 1 \text{ i } \beta = 1,$$

on suposem que la variància de K no es fa 0 al punt de transició.

Podem comparar el resultat anterior més general, $\rho \simeq 2(m - 1)/\sigma^2$, per a m per sobre però a prop d'1, amb el resultat que hem trobat per al cas binomial amb $n = 2$, on

$$\rho = 1 - \left(\frac{1-p}{p}\right)^2 = \frac{2p-1}{p^2}$$

quan $p \geq 1/2$. Fent servir que, en aquest cas, $m = 2p$ i $\sigma^2 = 2pq$ (vegeu [29]),

$$\frac{2(m-1)}{\sigma^2} = \frac{2p-1}{pq} \simeq \frac{2p-1}{p^2},$$

ja que $q = 1 - p \simeq p$ per a $p \simeq 1/2$. Per tant, ambdós resultats són coincidents prop del punt de transició.

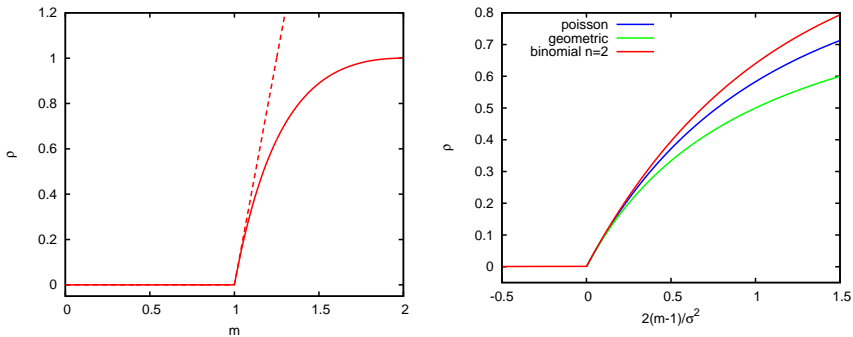


FIGURA 7: Esquerra: probabilitat de no-extinció ρ com a funció del nombre mitjà de descendents per element, m . Les línies discontinües corresponen a l'aproximació que s'explica al text. El canvi abrupte en ρ és la marca de la casa d'una transició de fase contínua. La distribució de nombre de descendents és binomial, amb $n = 2$. Dreta: el mateix, però com a funció de la distància al punt crític reescalada, $2(m - 1)/\sigma^2$, on σ^2 indica la variància a $m = 1$. També s'hi mostren les distribucions de Poisson i geomètrica.

Ja per acabar, i encara que sigui només en pro de la completesa, podem jugar amb un cas nou, diferent de l'anterior, el que correspon al valor patològic $\sigma^2 = 0$ (per al qual no són vàlides les derivacions de dalt). Considerem primer el següent model: $p_0 = 1 - \lambda_1$, $p_1 = \lambda_1$ (i 0 altrament), amb $\lambda_1 \leq 1$. Aleshores, $m = \lambda_1$, i ja

sabem que $\rho = 0$. Considerem ara $p_1 = 1 - \lambda_2$, $p_2 = \lambda_2$, i, per tant, $m = 1 + \lambda_2$. En aquest cas, el punt de tall de la funció generatriu amb la diagonal és per a $\rho = 1$ sempre. Quan considerem la variació de les probabilitats donades pels dos models conjuntament obtenim una transició de fase discontinua, o de primer ordre.

2.9 La distribució de la mida total de la població: distribució binomial i arbres amb arrel

En aquesta subsecció ens centrarem en el càlcul de la mida total S de la població quan fem la suma respecte de totes les generacions, és a dir,

$$S = \sum_{t=0}^{\infty} Z_t.$$

Aquesta quantitat correspon al nombre total d'individus que s'han originat o al nombre total de neutrons que participen en una reacció nuclear en cadena o, en el nostre model dels terratrèmols, a l'energia total radiada durant un esdeveniment.

Recuperem un cop més el cas particular de la distribució binomial

$$p_k = P(K = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}, \quad \text{per a } k = 0, \dots, n.$$

En aquest cas, la distribució de la mida total es pot calcular fent servir probabilitat i combinatòria bàsiques. El punt clau és la correspondència natural entre els processos de ramificació i els *arbres* (és a dir, els grafs connectats sense cicles). Cada individu correspon a un node, i cada branca o aresta del graf correspon a una relació de descendència entre dos nodes. Òbviament, tots els nodes tenen una sola branca entrant (un sol «pare»), excepte el node que correspon a la generació zero (que, en aquest context, s'anomena l'*arrel* de l'arbre). Per tant, el nombre de branques és el nombre de nodes menys 1. Com que la mida s d'un arbre és el seu nombre de nodes, el nombre de branques serà $s - 1$, i el nombre de branques absents (intents de reproducció no favorables) serà $ns - (s - 1)$ (ja que el nombre total de possibles branques a partir de s nodes és ns) [6]. Per tant, cada arbre concret de mida s apareix amb probabilitat $p^{s-1} (1 - p)^{(n-1)s+1}$, i la probabilitat de tenir un arbre qualsevol de mida s s'obté sumant respecte tots els arbres de mida s . Per al cas $n = 2$ el nombre d'arbres binaris de mida s correspon al número de Catalan

$$C_s = \frac{1}{s+1} \binom{2s}{s};$$

vegeu l'apèndix per al càlcul complet. Per tant,

$$P(S = s) = \frac{1}{s+1} \binom{2s}{s} p^{s-1} (1 - p)^{s+1} \quad \text{amb } s = 1, 2, \dots \quad (1)$$

Fent servir la funció generatriu dels números de Catalan es pot comprovar que aquesta expressió està normalitzada per a $p \leq 1/2$ però no per a $p > 1/2$, i que, de fet,

$$\sum_{s=1}^{\infty} P(S = s) = P_{\text{ext}};$$

novament, vegeu l'apèndix.

De totes maneres, l'expressió (1) no ens ajuda gaire a comprendre el comportament de la distribució $P(S = s)$ (si no és que tenim una gran intuïció per al comportament dels coeficients binomials). Però fent servir l'aproximació de Stirling [1, 7] podem obtenir un resultat aproximat però més informatiu [6]:

$$C_s \sim \frac{4^s}{\sqrt{\pi} s^{3/2}}.$$

Aquesta expressió, vàlida per a mides grans, és una exponencial creixent en s , i el terme $s^{3/2}$ no sembla tenir un paper important, asimptòticament. Ara bé, en introduir el factor $p^{s-1}(1-p)^{s+1}$, resulta

$$P(S = s) \sim \frac{1-p}{\sqrt{\pi} p} \frac{[4p(1-p)]^s}{s^{3/2}}.$$

Com que $p(1-p) \leq 1/4$, el terme exponencial esdevé decreixent excepte per a $p = 1/2$, on desapareix totalment. De fet, podem anar un pas més enllà si posem

$$[4p(1-p)]^s = e^{s \ln[4p(1-p)]} = e^{-s/\xi(p)},$$

on $\xi(p)$ és una mida característica que depèn de p , definida per

$$\xi(p) = \left(\ln \frac{1}{4p(1-p)} \right)^{-1},$$

i finalment

$$P(S = s) \sim \frac{1-p}{\sqrt{\pi} p} \frac{e^{-s/\xi(p)}}{s^{3/2}}.$$

Per tant, per a s gran però considerablament més petita que $\xi(p)$, la distribució de probabilitat de la mida total de la població és essencialment una llei de potències amb exponent $3/2$; i per a s encara més gran, el decreixement exponencial domina. En aquest sentit, $\xi(p)$ és una escala característica. L'excepció es dona per a $p = 1/2$, on $\xi(p) \rightarrow \infty$, el terme exponencial desapareix i la distribució es converteix en una llei de potències pura. En aquest cas, l'exponent $3/2$ és un exponent crític. Per a tenir una idea de la bondat de l'aproximació que hem dut a terme, vegeu la figura 8.

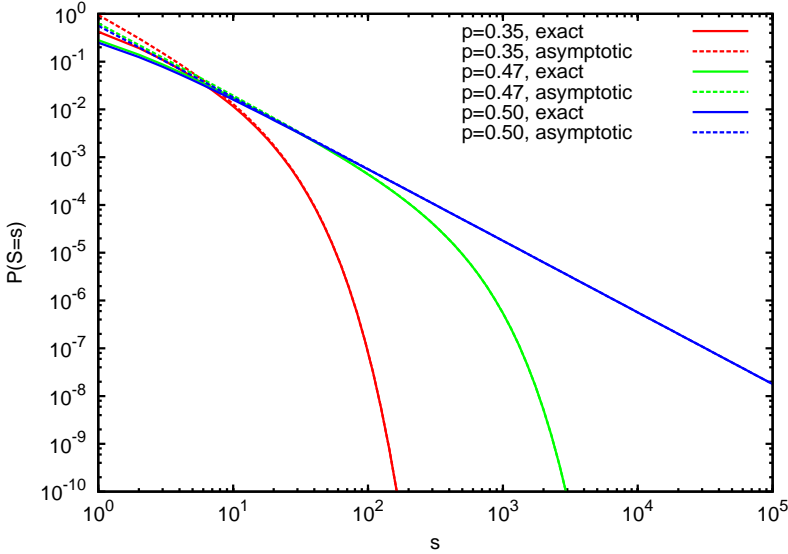


FIGURA 8: Distribució de probabilitat de la mida total de la població S per a diferents valors del paràmetre p en un cas binomial amb $n = 2$. Es mostren el cas subcrític i el cas crític; en aquest darrer la llei de potències pura es fa ben palesa. També es mostra la solució asimptòtica per a s gran.

De la divergència de la mida característica $\xi(p)$ sorgeix un altre exponent crític [6]. Introduint la desviació respecte el punt crític $\Delta \equiv p - p_c$, i en el nostre exemple $\Delta = p - 1/2$, podem escriure

$$p(1-p) = \frac{1}{4} - \Delta^2,$$

i per tant, a prop del punt crític (és a dir, per a Δ petit),

$$\frac{1}{4p(1-p)} = \frac{1}{1-4\Delta^2} \simeq 1 + 4\Delta^2 + \dots,$$

i per tant

$$\ln \frac{1}{4p(1-p)} \simeq \ln(1 + 4\Delta^2) \simeq 4\Delta^2 + \dots$$

(fent servir el desenvolupament de Taylor del logaritme al voltant de 1), i llavors

$$\xi(p) = \left(\ln \frac{1}{4p(1-p)} \right)^{-1} \simeq \frac{1}{4\Delta^2} + \dots$$

En paraules, quan els físics diuen que la mida característica $\xi(p)$ divergeix al punt crític com una llei de potències, amb exponent igual a 2, estan dient el

que expressa l'equació anterior. A més, aquesta equació ens permet escriure d'una manera més senzilla la fórmula asimptòtica (s gran) per a la distribució de la mida total, al voltant del punt crític:

$$P(S = s) \sim \frac{1 - p}{\sqrt{\pi p}} \frac{e^{-4(p-p_c)^2 s}}{s^{3/2}}.$$

Noteu que la distribució té la mateixa forma tant per sobre com per sota del punt crític si es manté la distància a aquest, $|p - p_c|$, i l'única diferència es troba en la constant multiplicativa, que depèn de p directament. Això és perquè per sobre del punt crític la distribució no està normalitzada (a causa de la massa a l'infinit; vegeu l'apèndix). Ara sí, després d'aquestes últimes consideracions, que es troben a [6], ja podem dir alguna cosa de la distribució de probabilitat de l'energia en el model d'Otsuka (model que, de ben segur, els nostres lectors ja han identificat com un cas particular del procés de Galton-Watson). Si prenem $p < 1/2$, la distribució que obtenim té una cua exponencial, amb una escala característica donada per $\xi(p)$. Això significa que els terratrèmols s'atenuen, o s'extingeixen, i que de cap manera poden dissipar energies per sobre de $\xi(p)$ (la probabilitat d'obtenir un esdeveniment de mida superior a $10\xi(p)$ és extraordinàriament petita). Aquest és el cas subcrític.

En canvi, si $p > 1/2$ hi ha dos tipus de terratrèmols. Els primers són semblants al del cas subcrític: tenen una mida limitada per l'escala que defineix $\xi(p)$, però els segons són diferents, són terratrèmols infinits (recordem que $P_{\text{ext}} < 1$ en aquest cas!). Per a aquest segon tipus de terratrèmol, la pertorbació inicial (la caiguda d'una sola peça de dòmino) dóna lloc a un creixement exponencial. Aquest segon és el cas supercrític. Ara bé, ni el cas subcrític ni el cas supercrític són compatibles amb la llei de Gutenberg-Richter, la qual presenta una distribució d'energies en llei de potències, sense cap escala característica. Únicament el cas crític, $p = 1/2$, és capaç de reproduir aquesta estadística. Per tant, la propagació d'un terratrèmol al llarg d'una falla és un fenomen estocàstic no només en el sentit que no sabem què passarà després que un fragment llisqui sinó que, molt pitjor, en el cas crític la probabilitat que té l'activitat de créixer i la de decreixer són iguals.

Cal remarcar que la concordança dels resultats és qualitativa, però no quantitativa, ja que el model dóna $\alpha = 3/2 = 1.5$ i en canvi per a terratrèmols reals s'ha trobat que $\alpha \approx 5/3 \approx 1.67$. A la subsecció següent expliquem que el valor $3/2$ és robust, i que altres versions del procés de Galton-Watson condueixen al mateix exponent. Yan Kagan ha estudiat a fons aquesta discrepància entre la modelització i els terratrèmols reals [16], i conclou que els mesuraments empírics (els que permeten obtenir el moment sísmic, o l'energia) contenen una sèrie d'artificis operacionals que fan que el valor de l'exponent per a terratrèmols creixi, i per tant, segons aquest autor, ambdós exponents serien realment més propers i probablement compatibles.

2.10 La funció generatriu de la mida total de la població

Ens movem ara als Estats Units, en plena Segona Guerra Mundial. Mentre els soldats morien al camp de batalla i els civils patien els horrors de la «barbàrie», un grup de científics es reunien en la tranquil·litat de Los Álamos, Nou Mèxic, amb l'objectiu de fer recerca i desenvolupar les primeres bombes nuclears. Un dels integrants d'aquest grup de privilegiats era el gran matemàtic polonès Stanislaw Ulam, contractat pel seu famós col·lega John Von Neumann [33]. Juntament amb David Hawkins —filòsof de la ciència i el matemàtic amateur amb més talent que mai va conèixer Ulam— es dedicaven a investigar la multiplicació de neutrons en reaccions nuclears en cadena, fent servir el que ara anomenem processos de ramificació. Sembla que desconeixien per complet els treballs pioners de Galton i Watson.



FIGURA 9: El matemàtic polonès Stanislaw Ulam, al costat de la versió actual de la primera pàgina de [13], després que fos desclassificada. Aquesta feina, que conté deduccions i fórmules importants per als processos de ramificació, va formar part de l'anomenat projecte Manhattan.

Hawkins i Ulam van provar, entre d'altres coses, que la funció generatriu de probabilitats $g(x)$ de la mida total de la població $S = \sum_{t \geq 0} Z_t$ compleix, en els casos subcrític i crític, que

$$g(x) = x f(g(x)),$$

on, com de costum, $f(x)$ és la funció generatriu del nombre de descendents d'un sol element. El que segueix a continuació està basat en aquells treballs del projecte Manhattan [13], però la nostra deducció és, segons com, més senzilla.

El que per a nosaltres és la mida total de la població correspon al nombre total de neutrons generats durant una reacció nuclear.

Primer de tot ens serà més útil considerar la mida de la població des de la generació 1 fins a la τ (per tant, sense comptar de moment la generació zero). És a dir,

$$S_\tau = \sum_{t=1}^{\tau} Z_t,$$

amb probabilitats $q_s^{(\tau)} = P(S_\tau = s)$ i funció generatriu $\tilde{g}_\tau(x) = \sum_{s \geq 0} q_s^{(\tau)} x^s$. Una mida total s entre les generacions 1 fins a τ es pot descompondre en una mida k a la primera generació, amb probabilitat p_k , i una mida $s - k$ en les restants $\tau - 1$ generacions (de la 2 a la τ), però amb k elements inicials; això passa amb probabilitat $q_{s-k}^{(\tau-1,k)}$ (fixeu-vos que, amb la notació actual, $q_s^{(\tau)} = q_s^{(\tau,1)}$). Aleshores, per la llei de les probabilitats totals [26]

$$q_s^{(\tau)} = \sum_{k=1}^s p_k q_{s-k}^{(\tau-1,k)},$$

excepte per a $s = 0$, on $q_0^{(\tau)} = p_0$. Si ara multipliquem per x^s i sumem per a tot s , des de 0 fins a ∞ , obtindrem al cantó esquerre la funció generatriu de S_τ , que resulta ser

$$\tilde{g}_\tau(x) = p_0 + \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{k=1}^s p_k q_{s-k}^{(\tau-1,k)} x^s = p_0 + \sum_{k=1}^{\infty} p_k \left[\sum_{s=k}^{\infty} q_{s-k}^{(\tau-1,k)} x^{s-k} \right] x^k.$$

Ara, el terme entre claudàtors és la funció generatriu de la mida acumulada entre les generacions 1 i τ , però amb k elements inicials (és a dir, $Z_1 = k$ enlloc de $Z_0 = 1$). Com que les evolucions dels k individus inicials són independents entre si, la mida resultant serà la suma de k variables aleatòries independents, cadascuna d'elles amb funció generatriu $\tilde{g}_{\tau-1}$, i per tant la funció generatriu total corresponent serà $[\tilde{g}_{\tau-1}(x)]^k$:

$$[\tilde{g}_{\tau-1}(x)]^k = \sum_{s=k}^{\infty} q_{s-k}^{(\tau-1,k)} x^{s-k}.$$

Substituint a dalt, obtenim

$$\tilde{g}_\tau(x) = p_0 + \sum_{k=1}^{\infty} p_k [\tilde{g}_{\tau-1}(x)]^k x^k = f(x \tilde{g}_{\tau-1}(x)),$$

on hem introduït la definició de $f(x) = f_k(x)$.

Finalment, si volem comptar la generació zero, hem d'afegir una variable aleatòria amb funció generatriu x (ja que Z_0 pren el valor 1 amb probabilitat 1), i per tant la funció generatriu de la mida acumulada entre les generacions 0 i τ serà el producte $g_\tau(x) = x \tilde{g}_\tau(x)$. Això ens porta a

$$g_\tau(x) = x f(g_{\tau-1}(x)).$$

Tornant a la mida total

$$S = \sum_{t=0}^{\infty} Z_t,$$

la seva funció generatriu és $g(x) = \lim_{\tau \rightarrow \infty} g_{\tau}(x)$. Si la probabilitat d'extinció és 1, és a dir, si el sistema no és supercrític, això és equivalent a $\lim_{\tau \rightarrow \infty} g_{\tau-1}(x)$, i per tant tenim que

$$g(x) = xf(g(x)).$$

Així doncs, la solució d'aquesta equació, on $f(x)$ és coneguda, és la funció generatriu que buscàvem. En general no podrem resoldre aquesta equació, però per a obtenir els moments de S de fet no ens caldrà. Derivant respecte x tenim que

$$g'(x) = f(g(x)) + xf'(g(x))g'(x),$$

i prenent $x = 1$ i aïllant,

$$\langle S \rangle = g'(1) = \frac{1}{1 - f'(1)} = \frac{1}{1 - m},$$

que tendeix a infinit quan $\langle K \rangle = m = f'(1)$ tendeix a 1, és a dir, al punt crític. Òbviament, com ja hem dit, aquest resultat no es pot aplicar al cas supercrític, $m > 1$, on la població pot créixer fins a l'infinit amb probabilitat no nul·la. Si continuem derivant, obtenim de manera similar els moments d'ordre superior. Aquest resultat, de fet, l'hauríem pogut obtenir directament, ja que

$$\langle S \rangle = \langle Z_0 + Z_1 + Z_2 + \dots \rangle = \langle Z_0 \rangle + \langle Z_1 \rangle + \langle Z_2 \rangle + \dots = 1 + m + m^2 + \dots = \frac{1}{1 - m},$$

on la darrera igualtat només és vàlida en el cas subcrític, ja que altrament $\langle S \rangle$ divergeix.

L'equació per a $g(x)$ es pot resoldre fàcilment en alguns casos (molt pocs). Tornant al nostre cas binomial amb $n = 2$, on $f(x) = (1 - p + px)^2$, tenim que

$$g(x) = xf(g(x)) = x(1 - p + pg(x))^2,$$

i per tant

$$g(x) = \frac{1 - 2pqx \pm \sqrt{1 - 4pqx}}{2p^2x},$$

amb $q = 1 - p$. Ara, desenvolupant per Taylor l'arrel quadrada,

$$\sqrt{1 - 4pqx} = 1 - 2pqx - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(2s-1)!! 2^{s+1}}{(s+1)!} (pqx)^{s+1},$$

observem que han aparegut novament els números de Catalan i obtenim (vegeu l'apèndix per als detalls),

$$g(x) = \frac{q}{p} \sum_{s=1}^{\infty} C_s (pqx)^s.$$

Noteu també que únicament el cas de signe menys davant de l'arrel ens proporciona realment una vertadera funció generatriu. Per tant, els coeficients de x^s ens porten a

$$P(S = s) = C_s p^{s-1} q^{s+1},$$

per a $s \geq 1$. Aquest resultat és exactament el mateix que hem obtingut anteriorment. Aquest vegada, però, no hem hagut de comptar arbres, perquè els números de Catalan han aparegut de forma natural en fer el desenvolupament en sèrie (de fet, no era necessari ni conèixer-los!).

Per tant, hem confirmat que el model d'Otsuka amb una distribució binomial i $n = 2$ porta a una llei de potències amb exponent $3/2$ per a la distribució de la mida total de la població. Però el que realment ens agradaria és estudiar com és de robust aquest exponent, ja que de fet el model és, com tots, una simplificació de la realitat, i per tant no voldríem que, en modificar el model, s'obtinguessin comportaments totalment diferents.

Tot i que obtenir la llei de potències per a la distribució de S és força rebuscat (al cap i a la fi, cal ajustar el paràmetre p a $1/2$), si considerem altres casos més enllà del binomial, el comportament asimptòtic en el cas crític segueix sent una llei de potències amb exponent $3/2$. Això es pot demostrar fent servir la fórmula de Cauchy en el pla complex i suposant únicament variància finita,¹ vegeu [12, 25]. Per tant, més enllà de la robustesa, s'acostuma a parlar d'universalitat per a referir-se a aquesta invariància.

3 Autoorganització i criticitat

La teoria de la pila de sorra —la criticitat autoorganitzada— és irresistible com a metàfora.

Al Gore

Ara estem en condicions d'acceptar la correspondència entre un procés de ramificació crític i l'ocurrència de terratrèmols, no només qualitativament sinó també, si seguim els comentaris de Kagan [16], quantitativament. Per a fer coincidir el nostre model amb la realitat, simplement hem d'agafar $p = 1/2$ (per al model d'Otsuka binomial), o $m = 1$ (en general), i l'ajustament és realment satisfactori, i de fet podríem finalitzar aquí la nostra cerca d'un model.

Però també podem anar un pas més enllà i preguntar-nos: com és que els sistemes tectònics (i altres geosistemes relacionats amb les catàstrofes naturals) estan sempre en un estat aparentment crític? Pot tractar-se d'una pura coincidència? Per al cas de la reproducció d'éssers vius, hom podria empescar-se un argument de tipus evolucionista. Imaginem una sèrie d'illes, totalment aïllades entre si, i cadascuna habitada per una població que segueix un procés de Galton-Watson, però amb un valor diferent del paràmetre p (o m). Sens dubte,

¹ Aquest resultat, però, no es manté per al cas de variància infinita; vegeu [30].

les illes amb poblacions subcrítiques quedaran desertes al cap de cert nombre de generacions. Pel que fa a les poblacions supercrítiques, o bé s'extingiran o bé explotaran exponencialment, i en aquest cas suposem que la població es col·lapsarà per l'exhauriment dels recursos (aquest ingredient no forma part del model original de Galton–Watson). En el cas crític les poblacions també s'extingiran, però per a algunes (poques) d'aquestes illes la població podrà sobreviure durant molt de temps, moltíssim més que en els altres dos casos. Per tant, al cap d'un cert temps només trobaríem poblacions crítiques, que serien les més adaptades a l'entorn que els hi hem proporcionat.

3.1 Procés de ramificació autoorganitzat

De tota manera, l'escenari evolutiu tot just descrit no es pot aplicar a sistemes tectònics, per als quals quan un procés (el terratrèmol) s'extingeix, tard o d'hora en comença un de nou. La situació dels terratrèmols correspondria, més aviat, a trobar tots els materials magnètics de la Terra al llindar de la magnetització, o equivalentment a trobar cada material a la seva corresponent temperatura de Curie. Aleshores, potser pensaríem que algun mecanisme està forçant la criticitat, fent variar la temperatura en funció de la magnetització i mantenint aquesta al voltant de la transició. En resum, sospitaríem que algun mecanisme de retroalimentació interrelaciona els dos paràmetres [28].

Zapperi *et al.* [35] proposen un model d'aquest tipus. Comencen amb un procés de ramificació estàndard, però introdueixen algunes modificacions importants:

- Limiten el nombre de generacions a un màxim de τ , per tant $0 \leq t \leq \tau$. Això vol dir que després de la generació τ el procés ja no continua.
- Quan el procés s'acaba, bé en arribar a la generació τ bé perquè s'extingeix abans, es torna a generar un procés nou, començant novament amb un únic element, o sigui, $Z_0 = 1$. Aquest procés nou constituirà el que anomenarem una nova realització, que enumerarem amb l'índex T . La clau d'aquest model és que els paràmetres poden canviar de realització en realització. Això es fa de tal manera que quan el procés es subcrític ($m < 1$), la mitjana m del nombre de descendents per element tingui tendència a augmentar; i en canvi quan el procés és supercrític ($m > 1$), la mitjana m tendeixi a disminuir. La idea és transformar el cas crític $m = 1$ en un atractor del sistema.

Com a exemple concret, tornem al nostre cas particular, la distribució binomial amb dos intents de reproducció i una probabilitat p d'èxit associada a cada intent. Com ja sabem, $p < 1/2$, $p = 1/2$ i $p > 1/2$ corresponen als casos subcrític, crític i supercrític, respectivament. La dinàmica proposada per Zapperi *et al.* a [35] està basada en Z_τ , el nombre d'elements a la darrera generació τ . Aquesta dinàmica consisteix a fer variar p de realització en realització mitjançant la fórmula

$$p(T+1) = p(T) + \frac{1 - Z_\tau(p(T), T)}{N},$$

essent T l'índex discret que compta el nombre de realitzacions del procés (i que cal no confondre amb t) i N un número molt gran ($N \gg \tau$ de moment). Per tant, si el procés s'extingeix abans d'arribar a la darrera generació possible, Z_τ és 0 i el paràmetre p augmenta en $1/N$, una quantitat molt petita en el límit $N \rightarrow \infty$. Per altra banda, si el nombre d'elements a la generació τ és més gran que 1, p disminueix en $(Z_\tau - 1)/N$.

Sabent que el valor esperat de Z_τ és m^τ , on m és la mitjana de la distribució de descendència ($m = 2p$ en el nostre cas binomial particular), introduïm ara un terme de soroll η per a tenir en compte les fluctuacions de Z_τ al voltant de la mitjana, és a dir, $\eta = Z_\tau - m^\tau$. Òbviament, $\langle \eta \rangle = 0$ per construcció. Si, per uns moments, ignorem el terme de soroll a l'equació de $p(T + 1)$, la part determinista és

$$p(T + 1) = F(p(T)) = p(T) + \frac{1 - (2p(T))^\tau}{N}.$$

Això no és més que un sistema dinàmic discret, o un mapa [2], que té un punt fix donat per la solució de $p^* = F(p^*)$ que resulta ser $p^* = 1/2$. A més a més, el punt fix és un atractor [2], ja que $|F'(p^*)| < 1$, pel fet que $\tau \ll N$.

Per a N molt gran el terme de soroll η/N tindrà un efecte negligible, i per tant el sistema estocàstic evolucionarà cap al punt fix previst per la part determinista, més algunes petites fluctuacions aleatòries entorn seu. Noteu que aquest punt fix correspon al punt crític del procés de ramificació. L'evolució espontània d'un sistema cap a un estat amb una certa estructura o ordre s'anomena autoorganització i hi ha exemples ben coneguts (els patrons de convecció als fluids o l'autoregulació dels mercats). En el nostre cas parlem de procés de ramificació autoorganitzat; més endavant veurem quin ordre o estructura està associat a l'estat crític.

De tota manera, s'ha de pagar un preu per obtenir criticitat de manera espontània. Com que el procés s'interromp a la generació τ , la distribució de la grandària del procés, $P(S = s)$, ja no serà exactament una llei de potències, tot i que el procés sigui crític, sinó que tindrem desviacions pels valors més grans de s . Fins i tot, si τ fos molt petit, la distribució resultant tindria poc a veure amb una llei de potències. No obstant això, fent τ prou gran ens podem aproximar tant com vulguem a la llei de potències.

Resumint, el que Zapperi *et al.* van introduir és un procés de ramificació que s'autoorganitza cap a un estat crític, tot i que la dinàmica que proposen sembla més aviat arbitrària. Correspondria, en l'exemple de les illes, a tenir un déu creador que, quan una població s'extingeix, en crea una altra però modificant adequadament la seva taxa de reproducció, fins a acabar arribant a una població crítica, o sigui, en equilibri entre l'extinció i l'explosió demogràfica. Ara bé, com es podria implementar aquest tipus de control global (que fa canviar els paràmetres p de tots els elements alhora) en un sistema real, on hom espera que les interaccions entre elements siguin purament locals i no hi hagi cap controlador omniscient?

3.2 Criticitat autoorganitzada

El procés de ramificació autoorganitzat de Zapperi *et al.* de fet s'emmarca de manera natural en la noció de criticitat autoorganitzada, creada per Per Bak i els seus col·laboradors als anys vuitanta del segle passat [4, 14, 6]. Tot i que ara no és rellevant per als nostres propòsits, val la pena dir que aquests autors no estaven interessats en el problema de les lleis de potències en desastres naturals (ja que no el coneixien), sinó que els preocupaven altres problemes similars en física de la matèria condensada com ara les ones de densitat de càrrega, el soroll del tipus « $1/f$ » i la ubiqüitat de les estructures fractals a la natura. Però avui dia la criticitat autoorganitzada és molt més acceptada com a explicació de fenòmens catastròfics (tant a geociència com per a les flamarades solars, l'extinció de les espècies, etc. [4]) que pel que va ser originalment proposada. Llavors, malgrat el desconeixement inicial dels autors, aquests van trobar un mecanisme molt factible per reproduir l'estadística dels desastres naturals. Com hem vist al llarg d'aquest article, sembla que la falta d'informació és una característica comuna en l'evolució de la ciència.

Per a il·lustrar les seves idees, Bak *et al.* van utilitzar la metàfora de la pila de sorra. Hem de reconèixer que la pila de sorra amb la qual tractarem nosaltres és una mica esotèrica; més endavant justificarem per què i quan pot representar una pila de sorra real. Considerem un sistema format per un gran nombre de cel·les, on cada cel·la pot emmagatzemar un cert nombre de paquets discrets (o partícules), de manera que quan se supera aquest màxim alguns paquets es distribueixen entre els veïns (de moment no cal entrar en detalls, però per veïns entendrem les cel·les més properes a una donada). La situació és anàloga al que passa a les oficines d'un ministeri o una conselleria: cada buròcrata té una sèrie de documents o papers (els paquets) a la seva taula, però quan el nombre de documents és massa gran, decideix solucionar-ho simplement passant alguns dels documents als companys de les taules del costat, i així successivament (vegeu figura 10). Inesperadament, aquest comportament tan senzill donarà lloc a una dinàmica molt interessant.

Per tal de concretar una mica, considerem un reticle hipercúbic en d dimensions on cada cel·la pot emmagatzemar només un paquet; si arriba un segon paquet, la cel·la reenviarà els dos paquets a altres cel·les, escollides aleatòriament i independent entre els $2d$ veïns més propers (que seran les cel·les adjacents). Si, després d'aquest procés, el nombre de paquets encara és superior a 1 (cosa que pot passar si la cel·la havia rebut més d'un paquet), el procés es repeteix. Totes les cel·les duen a terme aquest procés de manera simultània, és a dir, seguint un rellotge comú que marca el temps t , el que es coneix com a actualització en paral·lel. A més a més, el sistema és obert: pot haver-hi una pèrdua de paquets cap a l'exterior (fora del reticle). Això passa quan una cel·la de la frontera selecciona com a destí d'un paquet una altra cel·la que està fora dels límits del sistema; en el cas dels buròcrates tenim el mateix quan algú d'ells llença un document per la finestra.

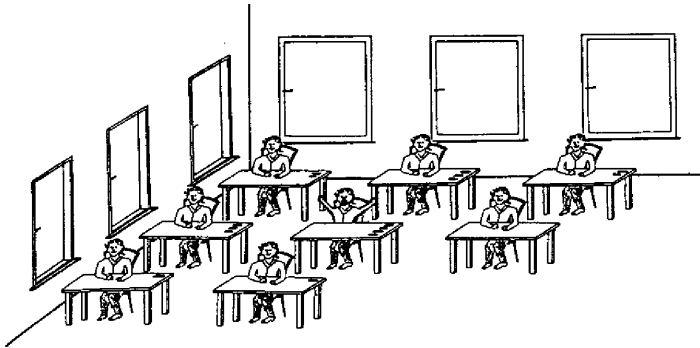


FIGURA 10: Il·lustració del model de pila de sorra entès com una paròdia de la burocràcia. Del llibre de Bak [4].

Òbviament, aquest procés pot engegar una allau de transferències de paquets, que només s'atura quan totes les cel·les tenen un paquet com a molt. Quan s'arriba a aquest punt, el sistema és pertorbat afegint un paquet addicional a una cel·la escollida de manera aleatòria, cosa que reactiva la dinàmica, o no. Mentre no hi hagi activitat (totes les cel·les estan per sota del llindar) es van afegint paquets a cel·les aleatòries. D'aquesta manera es defineix una nova escala temporal, que denotarem per T (tal com fèiem a la subsecció anterior); o sigui, T compta el nombre de paquets afegits. Notem que tenim dues escales temporals ben separades: l'escala ràpida, assenyalada per t , que compta els passos de l'allau, i l'escala lenta, marcada per T .

Les regles tot just descrites verbalment poden també expressar-se matemàticament, és clar. Siguin j, k, n , vectors que identifiquen les cel·les al reticle d -dimensional i sigui z_j la quantitat de paquets continguts a la cel·la j . A més, $nn(j)$ representa dos veïns aleatoris de la cel·la j , triats uniformement i independent entre els $2d$ veïns més propers; per la seva banda, rand representa una cel·la del reticle triada aleatòriament, de manera uniforme sobre tot el reticle. Les tries aleatòries s'actualitzen a cada pas, de manera independent. Les fletxes fines indicaran que una variable passa a prendre un altre valor, tal com es programaria en un ordinador amb el signe d'igualtat. Llavors les regles són:

$$\begin{aligned} \text{si } z_j \geq 2 & \Rightarrow \begin{cases} z_j & \rightarrow z_j - 2, \\ z_{nn(j)} & \rightarrow z_{nn(j)} + 1, \end{cases} \\ \text{si } z_k < 2 \forall k & \Rightarrow z_n \rightarrow z_n + 1 \text{ amb } n = \text{rand}, \end{aligned}$$

que es poden iterar *ad infinitum*. La primera regla, la de la relaxació, defineix l'escala de temps ràpida, donada per t , mentre que la segona, la de l'addició, defineix l'escala lenta, donada per T . L'existència de dues escales de temps fa farragosa la notació i per això prescindim d'etiquetes temporals. Repetim que la regla de relaxació s'ha d'aplicar en paral·lel, simultàniament, a totes les cel·les j que verifiquin la condició llindar.

Aquestes regles defineixen un autòmat cel·lular: un sistema dinàmic on l'espai, el temps i la variable definida sobre aquests són tots discrets; aquests autòmats poden donar lloc a comportaments d'una gran complexitat. De fet, ens trobem davant d'un sistema complex, en el sentit que està constituït per molts elements (les cel·les) que interaccionen entre si de tal manera que el comportament col·lectiu, de tot el sistema, serà més que la simple suma dels comportaments individuals, com ja veurem. Tenim exemples de sistemes complexos en gairebé qualsevol estructura realment interessant: la cèl·lula, el cervell, els ecosistemes, l'economia, les xarxes socials, el clima... La ciència emergent dels sistemes complexos tracta d'aportar una nova perspectiva a l'estudi d'aquesta mena de sistemes. Hom pot endevinar que es tracta d'una disciplina clarament transversal.

Tornant al nostre model, seguint les seves regles senzilles, el nombre total de paquets al sistema evoluciona de la manera següent, entre una pertorbació T i la següent $T + 1$:

$$M(T + 1) = M(T) + 1 - \text{drop}(T),$$

on «drop» és el nombre de paquets que el sistema expulsa. És a dir, entre cada addició de paquets i la següent, la massa M del sistema s'incrementa pel paquet que hem afegit i disminueix pel nombre de paquets que surten per la frontera durant l'allau (si aquesta té lloc). El paràmetre central d'aquest model és p , definit aquí per a cada cel·la com la probabilitat de tenir un sol paquet (just abans d'afegir un paquet, o sigui, quan la transferència de paquets ha cessat). Veurem com p es relaciona amb M . En un principi, p depèn de la posició de cada cel·la al reticle (les que estan més a prop del contorn tindran una probabilitat diferent de les que no ho estan) i hauríem d'afegir-li un índex espacial.

No obstant això, per a poder tractar matemàticament el sistema, treballarem en l'anomenada aproximació de camp mitjà [6], on veurem que p esdevé un paràmetre genèric de tot el sistema. En realitat, l'aproximació de camp mitjà, més que una aproximació és una redefinició del sistema, que fa canviar alguna característica d'aquest però sense alterar-ne l'essència. Ara ho veurem. Una manera d'implementar el camp mitjà és considerar que el reticle d -dimensional és de dimensió infinita, o sigui, en el límit $d \rightarrow \infty$ (tot i que el sistema que ens interessi pugui tenir $d = 2$, com a la figura 10). Una altra opció és suposar que els veïns no són els més propers a la cel·la sinó qualsevol cel·la triada aleatòriament entre totes les del sistema, i s'actualitzen aquestes tries aleatòries cada vegada. Ambdues eleccions són equivalents perquè la propagació dels paquets al sistema no formarà bucles: la probabilitat que un paquet torni a la cel·la d'on venia tendeix a zero en aquests dos casos (si el sistema és suficientment gran en el cas de triar la versió de veïns aleatoris); igualment, la probabilitat que dos paquets arribin a la mateixa cel·la tendirà a zero.

Llavors, en l'aproximació de camp mitjà no hi ha correlació entre l'estat de les cel·les, i aquestes són equivalents, i per tant la probabilitat que una cel·la qualsevol contingui un paquet vindrà donada pel nombre de paquets M dividit pel nombre de cel·les del sistema, que anomenem aquí N , o sigui, $p = M/N$ (les

celles o tenen un paquet o no en tenen cap, quan no hi ha activitat). Aquesta probabilitat, per les regles del model, és igual a la probabilitat que una cel·la deixi anar dos paquets quan en rep un, o sigui, es relaxi. Això es pot considerar un intent de reproducció exitós, però aquesta cel·la no serà la cel·la mare sinó la filla, és a dir, aquesta cel·la serà filla de la cel·la que li va transferir els paquets. La cel·la filla podrà donar lloc a descendència o no, depenent de si les cel·les que després rebin els paquets es relaxin o no. Veiem, doncs, que les relaxacions es propaguen pel sistema com un procés de ramificació binomial amb paràmetre p , i amb només 0, 1 o 2 filles. Si dividim l'equació de la massa al sistema per N , obtenim

$$p(T + 1) = p(T) + \frac{1 - \text{drop}(T)}{N},$$

que és pràcticament idèntica a l'equació introduïda per Zapperi *et al.* [35] en el procés de ramificació autoorganitzat de la subsecció anterior, i que ens diu que, en aquest model de camp mitjà, la probabilitat de reproducció en cada intent evoluciona d'aquesta manera (a l'escala de temps lenta). O sigui, en una allau les relaxacions es propaguen com un procés de ramificació però, a més a més, entre allau i allau, el paràmetre p canvia de la manera proposada per Zapperi i els seus col·laboradors. Cal remarcar, però, que això s'ha aconseguit sense actuar globalment sobre totes les cel·les. És tot el sistema el que regula el seu propi valor de p , a través del balanç entre l'addició de paquets i la seva sortida pels contorns.

Tal com hem analitzat a la subsecció anterior, el sistema tendirà, excepte per a petites fluctuacions, a un estat en el qual el nombre mitjà de paquets que surtin sigui $\langle \text{drop} \rangle = 1$. Llavors, a l'aproximació de camp mitjà hem d'implementar o redefinir les condicions de contorn de tal manera que el punt crític correspongui a aquesta situació. Simplement podem agafar la mateixa regla que Zapperi *et al.*, que és que les allaus es dissipin espontàniament després d'un nombre fixat τ de passos de temps. O sigui, les cel·les que es relaxen a la generació τ envien els seus paquets fora del sistema. Això fa que $\langle \text{drop} \rangle = 2 \langle Z_\tau \rangle = 2m^\tau = 1$, que dóna $m = 1/2^{1/\tau}$ i que tendeixi al punt crític $m = 1$ quan τ tendeix a infinit. De tota manera, aquesta tria per a les condicions de contorn no és l'única possible.

Així doncs, l'aproximació de camp mitjà ens permet relacionar el models de pila de sorra amb un procés de ramificació crític, i per tant, la distribució de la grandària de les allaus a aquesta versió de la pila seguirà una llei de potències, amb exponent $3/2$. De fet, com hem dit, esperem alguna petita desviació respecte a aquest comportament, a causa dels efectes introduïts per les condicions de contorn, que equivalen a tenir una grandària del sistema finita. Llavors, si el sistema és finit, no podem tenir allaus arbitràriament grans, però ens hi podem acostar molt. Per al model de pila de sorra original, sense fer l'aproximació de camp mitjà (amb interaccions locals i amb dimensió petita), els resultats seran diferents. Però simulacions per ordinador mostren que el camp mitjà dóna una explicació qualitativa del comportament de la pila; en particular, s'obté normalment una distribució de llei de potències però amb exponent diferent de $3/2$. A més, les regles d'interacció local donen lloc a correlacions

espacials i a estructures, i per això té sentit parlar d'una autoorganització cap a la criticitat, per l'existència precisament d'aquestes estructures al sistema.

3.3 Models de piles de sorra

Hem parlat tota l'estona de piles de sorra, però què té a veure la transferència de paquets descrita amb una pila real? La clau és que els paquets que es transfereixen no són grans de sorra, sinó unitats de pendent d'una pila bidimensional. Si j és un índex de posició que va d'1 a L (on L és la grandària lineal del sistema), definim l'alçada de la pila a la posició j com a $h_j = h_{j+1} + z_j$, començant pel valor de j més gran amb $h_L = z_L$. Recordem que z_j era el nombre de paquets a la posició j , i ara resulta que esdevé el pendent de la pila en aquesta posició. Fem notar que sent la pila bidimensional (vegeu figura 11), les variables z_j i h_j estan definides sobre una dimensió, i per tant, $d = 1$.

Per tenir l'equivalència amb una hipotètica pila de sorra cal encara una petita modificació de les regles: en comptes que quan una cel·la j es relaxa aquesta envia dos paquets a veïns triats aleatòriament, ara fem que s'envii un paquet al veí $j - 1$ i un altre al $j + 1$, per tant, $nn(j)$ s'ha de redefinir com a $nn(j) = j \pm 1$ (aquest canvi no altera el comportament de camp mitjà del model, perquè a camp mitjà es redefeixen els veïns). Llavors, és immediat comprovar que les regles resulten ser les següents:

$$\begin{aligned} \text{si } h_j - h_{j+1} \geq 2 & \Rightarrow \begin{cases} h_j \rightarrow h_j - 1 \\ h_{j+1} \rightarrow h_{j+1} + 1 \end{cases} \\ \text{si } h_k - h_{k+1} < 2 \forall k & \Rightarrow h_m \rightarrow h_m + 1 \text{ per a } m \leq n \text{ amb } n = \text{rand}. \end{aligned}$$

Tenim llavors un autòmat cel·lular que representa una pila de grans de tal manera que quan el pendent a j és més gran o igual que 2, un gra salta de j a $j + 1$ (cap a la dreta, segons la figura). Noteu que per construcció del model mai arribarem a la situació simètrica, pendent més petit o igual a -2 , i així el flux de grans sempre serà cap a valors de j més grans, o sigui, d'esquerra a dreta. La condició de contorn oberta per al pendent z a $j = L$ no dona una condició de contorn creïble per a h , i és més convenient canviar-la. Per tenir la situació experimental d'una pila oberta per la dreta (segons la figura), donada per $h_{L+1} = 0$ resulta que obtenim per a la relaxació a $j = L$ la regla $z_L \rightarrow z_L - 1$ (el pendent passaria a conservar-se al contorn dret). De fet, aquesta condició ja estava implícita a la tria $h_L = z_L$.

Un altre canvi possible al model pot ser afegir només un gra de sorra durant l'addició (en comptes d'un paquet, o sigui, una unitat de pendent); això és, $h_n \rightarrow h_n + 1$ i llavors $z_n \rightarrow z_n + 1$ però amb $z_{n-1} \rightarrow z_{n-1} - 1$. Existeixen moltíssimes variants d'aquestes regles que defineixen diferents models de piles de sorra, a vegades amb poca connexió amb el que hauria de ser una pila de sorra real. Recordem, al final, que aquests models pretenen ser en el fons una metàfora de l'aparició espontània de criticitat a la natura, i en principi no hi ha un interès específic a estudiar *per se* els medis granulars. Això seria una altra història.

Aquests models poden ser útils per descriure un altre tipus de fenomen: el creixement de superfícies (per exemple, un fluid que penetra en un altre medi). Si fem que la variable H_j compti el nombre total de relaxacions a la posició j (des de l'instant inicial) i si la condició inicial de la pila és buida ($h_j = 0$ per a tot j) i l'addició de grans es fa només a $j = 1$, llavors la variable H_j defineix l'avenç d'una interfase estirada des de $j = 1$. El gradient d'aquesta interfase dóna l'alçada de la pila, això és, $h_j = H_{j-1} - H_j$, amb $H_0 = T$, o sigui, el nombre total de grans afegits. Amb aquest tema podríem seguir molt més però se'ns acaba l'espai i el temps...

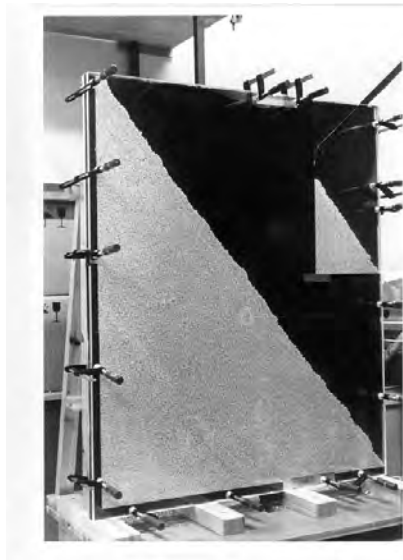


FIGURA 11: La «metàfora» de la pila de sorra, per al cas bidimensional, s'ha arribat a estudiar experimentalment. La instal·lació de la fotografia (cortesia de K. Christensen) utilitza dos plafons per a constrenyir la pila (de fet, dues piles), i arròs en comptes de sorra.

4 Conclusions

Hem començat aquest article mostrant algunes propietats estadístiques interessants de l'ocurrència de terratrèmols, i hem acabat jugant amb piles de sorra d'infinity dimensions que modelen la criticitat autoorganitzada. I, mentrestant, hem tingut temps d'aprendre quatre coses dels processos de ramificació. Potser ara és el moment de recapitular, de posar els continguts en perspectiva i d'esbossar algunes conclusions per al nostre objecte d'estudi inicial: els desastres naturals.

D'entrada, sense fer referència a cap model, només mirant les dades ja podem dir força coses: els terratrèmols i altres desastres naturals segueixen una distribució tipus llei de potències per la mida de la seva grandària, encara que en alguns casos amb una disminució exponencial afegida a causa de l'efecte de la finitud del sistema (la Terra és finita!). I encara més: per als valors dels exponents que s'han trobat, aquesta distribució implica que els grans esdeveniments, tot i que poc freqüents, són els que més contribueixen a la devastació global.

Pel que fa al model d'Otsuka, hem mostrat com es poden recuperar les propietats estadístiques de l'ocurrència real de terratrèmols (i d'altres desastres naturals) mitjançant un procés estocàstic en cascada raonablement simple per a les dinàmiques locals dels segments de les falles tectòniques, i amb l'ajuda del formalisme matemàtic dels processos de ramificació. És molt important remarcar aquest punt, perquè constitueix un pont entre dues escales observacionals diferents: la microescala de la dinàmica local i la macroescala del comportament estadístic global.

Ara bé, el model d'Otsuka no és més que un cas particular del procés de ramificació de Galton-Watson. És per això que, primerament, hem presentat de manera planera els principals resultats coneguts per a aquest tipus de processos (principals segons els nostres interessos, és clar). Hem explicat com, mitjançant la maquinària de les funcions generatrius, es pot trobar una fórmula per a l'activitat (o població) a qualsevol generació del procés. En el límit d'infinites generacions s'obté la probabilitat d'extinció, que mostra un brusc canvi de comportament entre dos règims clarament diferenciats: extinció segura quan el nombre mitjà de descendents és inferior a 1, i la possibilitat de no extinció quan és superior a 1. També hem obtingut una expressió per a la probabilitat de la mida total del procés, és a dir, la població que ha nascut en total, o, equivalentment, l'energia total radiada per un terratrèmol. És justament a la frontera d'aquests dos règims, és a dir, al punt crític de la transició de fase, on s'obtenen distribucions compatibles amb les dades reals de terratrèmols i altres fenòmens. En el nostre cas, apareix una distribució de potències amb exponent $3/2$; però llavors cal explicar quin mecanisme seria el responsable de conduir la Terra cap a aquest estat crític.

En aquest sentit, hem mostrat com es pot transformar el punt crític en un atractor del sistema, fent servir un mecanisme de retroalimentació força senzill. Cal que una condició global, relacionada amb la dissipació a la frontera, actui sobre la probabilitat d'activació, de manera que quan aquesta probabilitat és massa baixa, augmenti, i quan és massa alta, disminueixi. Els models de piles de sorra, en el límit ideal d'infinites dimensions, implementen de manera natural aquest mecanisme mitjançant el transport de partícules a través del sistema fins a la frontera, on es dissipen. El nombre de partícules regula l'activitat del sistema.

Finalment, cal comentar que la gènesi de sistema complex que hem explicat (començant per un simple procés de ramificació i complicant-ho fins a arribar a un model de pila de sorra amb molts elements que actuen localment) no constitueix la manera natural com es desenvolupen aquestes idees. Més aviat

és al contrari; o ni tan sols això, més aviat no es pot fer la connexió entre un sistema complex i una dinàmica simple. En general, per les limitacions inherents que plantegen els sistemes complexos, els models en aquest camp no poden ser més que una caricatura de les interaccions reals al sistema. Tot i això, només imposant a més a més l'aproximació de camp mitjà hom pot establir la connexió amb un sistema simple. Però l'aproximació de camp mitjà en la majoria dels casos resulta estar ben allunyada del model inicial, almenys quantitativament. Resoldre models reticulars, amb interaccions no globals, és terriblement complicat, i ara mateix els investigadors s'han de refiar de simulacions numèriques, ja que no hi ha resultats analítics exactes disponibles, excepte comptades excepcions (un conjunt de mesura nul·la, segurament). Però també és cert que això fa encara més interessants els problemes matemàtics que plantegen aquests sistemes. Sens dubte, els investigadors encara se n'hauran d'ocupar durant dècades!

A Apèndix

A.1 Dissipació d'energia a les escales més grans

Considerem una distribució de potències contínua, definida, per simplificar però sense pèrdua de generalitat, entre 1 i ∞ , amb funció de densitat

$$D(x) \propto \frac{1}{x^\alpha}.$$

Demostrarem que, donat $r > 2$, existeixen valors de α tals que la contribució d'un interval $1 \leq x < c$ al valor esperat de x és sempre menor que la contribució de $c \leq x < rc$, independentment de la grandària de c .

La contribució de l'interval $a \leq x < c$ al valor esperat de x és

$$\int_a^c xD(x) dx \propto c^{2-\alpha} - a^{2-\alpha},$$

i, per tant,

$$\int_c^{rc} xD(x) dx \propto c^{2-\alpha}(r^{2-\alpha} - 1).$$

Per tal que la darrera integral sigui més gran que l'anterior serà suficient demanar que

$$(r^{2-\alpha} - 1)c^{2-\alpha} > c^{2-\alpha}.$$

Per tant, $r^{2-\alpha} > 2$ i això implica que

$$\alpha < 2 - \log_r 2.$$

Per a $r = 10$, la condició suficient resulta ser $\alpha < 1.699$. En el cas de l'energia radiada pels terratrèmols, $\alpha \simeq 1 + 2b/3 \simeq 1.667$, i per tant la condició es compleix. Això sí, valors de α lleugerament superiors violarien la condició.

Tot i això, la tria de $r = 10$ no té res d'especial (no és cap número màgic!) i la condició es compleix per a valors de r més grans. Per a $r = 2$ la condició dictaria que $\alpha < 1$, cosa que no és un exponent acceptable per a una llei de potències (no seria normalitzable).

A.2 Demostració rigorosa de la probabilitat d'extinció

Més enllà d'arguments gràfics (vegeu la figura 5), volem donar una prova totalment rigorosa del càlcul de la probabilitat d'extinció en un procés de Galton-Watson, que ve donada per

$$P_{\text{ext}} = \lim_{t \rightarrow \infty} f^t(0),$$

on P_{ext} només està ben definida quan el límit existeix. Per a veure que això sempre passa, observem que $Z_t = 0 \implies Z_{t+1} = 0$. Per tant, $\{Z_t = 0\} \subset \{Z_{t+1} = 0\}$ i $P(Z_t = 0) \leq P(Z_{t+1} = 0)$, i per tant $f^t(0) \leq f^{t+1}(0)$ o, dit d'una altra manera, (f^t) és una successió creixent. Com que $f([0, 1]) \subset [0, 1]$, podem concloure que $f^t(0)$ està fitada i per tant té límit. Per continuar la nostra demostració, serà convenient tractar per separat els casos $m \leq 1$ i $m > 1$.

A.2.1 El cas $m \leq 1$: Com que la funció $f(x)$ és còncava per a $x \geq 0$, sempre està per sobre de qualsevol recta tangent a aquesta [31]. En particular, si considerem la tangent a $f(x)$ pel punt $(1, 1)$, tenim que

$$f(x) > 1 + m(x - 1) > x.$$

Per tant $f(x) > x$ per a $0 \leq x < 1$. És fàcil comprovar, també, que $f(P_{\text{ext}}) = P_{\text{ext}}$,

$$f\left(\lim_{t \rightarrow \infty} f^t(0)\right) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(f^t(0)) = \lim_{t \rightarrow \infty} f^{t+1}(0) = \lim_{t \rightarrow \infty} f^t(0),$$

i òbviament $0 \leq P_{\text{ext}} \leq 1$. Per tant, tenim que $f(P_{\text{ext}}) = P_{\text{ext}}$ amb $0 \leq P_{\text{ext}} \leq 1$. Resumint, P_{ext} és un punt fix de $f(x)$ a l'interval $[0, 1]$, però $f(x) > x$ (estrictament) a $[0, 1)$. Queda clar, doncs, que l'única opció que resta és $P_{\text{ext}} = 1$.

A.2.2 El cas $m > 1$: En aquest cas, començarem demostrant que $P_{\text{ext}} \neq 1$. Tal com acabem de veure, (f^t) és una successió creixent. A més, com que $f(x)$ és contínua i $f'(1) = m > 1$, tenim que $f(x) < x$ per a $x \in (1 - \epsilon, 1)$ per a un cert $\epsilon > 0$. Per tant, $f^t(0) \notin (1 - \epsilon, 1)$ per a tot t (ja que llavors decreixeria). Això voldria dir que l'única manera en què $f^t(0)$ pot tenir límit 1 seria «saltar per sobre» de l'interval $(1 - \epsilon, 1)$, és a dir, mitjançant un $y < 1 - \epsilon$ tal que $f(y) = 1$. Però aquest y no pot existir, perquè aleshores $f'(x) < 0$ en algun punt entre y i 1.

A continuació veurem que l'equació $f(x^*) = x^*$ té una única solució a l'interval $[0, 1)$. Ja sabem que hi ha d'haver, com a mínim, una solució, ja que $f(0) > 0$, i $f(x) < x$ a $(1 - \epsilon, 1)$ (aquí usem el teorema de Boltzano per a $f(x) - x$).

Per a veure que la solució és única, suposem que n'hi ha dues, $0 \leq x_1 < x_2 < 1$. Com que $f(1) = 1$, el teorema de Rolle implicaria que existeixen dos punts, y_1, y_2 , tals que $f'(y_1) = f'(y_2) = 1$ i $x_1 < y_1 < x_2 < y_2 < 1$. Però això és impossible ja que $f''(x) \geq 0$ a $[0, 1]$, i per tant $f'(x)$ és creixent i injectiva a $[0, 1]$.

Per tant, si $P_{\text{ext}} \neq 1$ però $f(P_{\text{ext}}) = P_{\text{ext}}$, aleshores P_{ext} ha de ser l'única solució de $f(x^*) = x^*$ a $[0, 1)$.

Si volguéssim ser totalment rigorosos, hauríem de tractar per separat alguns casos patològics, però ho ometrem perquè són sempre situacions sense interès real. Per exemple, el cas $f(x) = x$ òbviament no té una única solució, i per tant la demostració no s'hi aplica, però correspon a una situació gens interessant: $p_1 = 1$ i $p_k = 0$ per a tot $k \neq 1$. De totes maneres, aquests casos patològics sempre corresponen al cas $p_0 + p_1 = 1$; en cas contrari la concavitat està garantida. Més detalls en general de la demostració d'aquest apèndix es troben a l'article de Jolis [15].

A.3 Els números de Catalan

Els números de Catalan no deuen el seu nom a cap homenatge al nostre país, sinó al matemàtic francobelga del segle XIX Eugène Charles Catalan (tot i que, de fet, és raonable suposar que va tenir algun avantpassat català). Els «seus» números permeten comptar una gran varietat d'objectes [32], incloent-hi els arbres amb arrel que apareixen en l'estudi dels processos de ramificació quan el nombre de branques només pot ser 0, 1 o 2.

Un arbre de mida s es pot descompondre en l'arrel (que correspon a la generació zero) i els restants $s - 1$ nodes. Aquests, al seu torn, es poden classificar segons a quina branca pertanyin, i per tant tenim una quantitat variable de nodes a la primera branca, $0, 1, \dots, s - 1$ i la resta a la segona, $s - 1, s - 2, \dots, 1, 0$ respectivament. Per tant, el nombre d'arbres de mida s , C_s , compleix que,

$$C_s = C_0 C_{s-1} + C_1 C_{s-2} + \dots + C_{s-2} C_1 + C_{s-1} C_0,$$

on prenem $C_0 = 1$, ja que hi ha una sola manera de tenir mida 0. D'aquí obtenim

$$\begin{aligned} C_1 &= (C_0)^2 = 1, \\ C_2 &= 2C_0 C_1 = 2, \\ C_3 &= 2C_0 C_2 + (C_1)^2 = 5, \\ C_4 &= 2C_3 C_0 + 2C_2 C_1 = 14, \end{aligned}$$

i per tant aquesta senzilla recursió genera tots els números de Catalan. Per al lector curiós hem inclòs la figura 12, on es mostren tots els possibles arbres amb arrel amb no més de dues branques per node, fins a la mida 4.

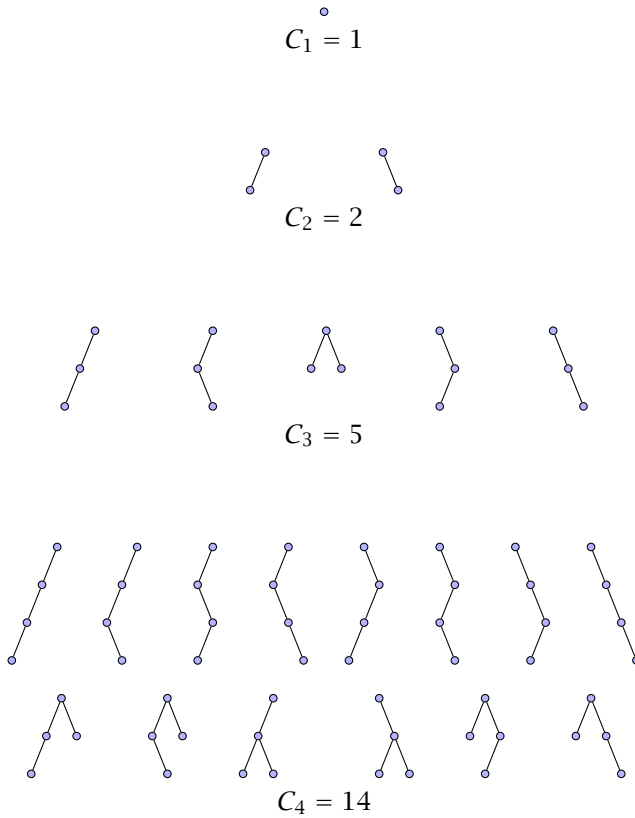


FIGURA 12: Tots els arbres amb arrel amb un màxim de dues branques per node, fins a la mida $s = 4$. El nombre d'arbres de mida s ve donat per C_s , l' s -èsim número de Catalan.

Ara bé, si el que busquem és una forma explícita per a C_s , caldrà definir-ne la funció generatriu

$$h(x) = C_0 + C_1x + C_2x^2 + \dots = \sum_{s=0}^{\infty} C_s x^s.$$

És possible obtenir una expressió per a $h(x)$ fent servir només les propietats dels números de Catalan. El truc consisteix a calcular *el quadrat* de $h(x)$:

$$\begin{aligned}
 [h(x)]^2 &= \left[\sum_{s=0}^{\infty} C_s x^s \right]^2 = \sum_{i,j=0}^{\infty} C_i C_j x^{i+j} = \sum_{s=0}^{\infty} \underbrace{\left[\sum_{i+j=s} C_i C_j \right]}_{C_{s+1}} x^s = \\
 &= \frac{1}{x} \sum_{s=0}^{\infty} C_{s+1} x^{s+1} = \frac{h(x) - C_0}{x},
 \end{aligned}$$

i, fent servir que $C_0 = 1$, arribem a

$$h(x) = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

Una d'aquestes dues funcions (segons el signe de \pm) ha de ser, per tant, la funció generatriu dels números de Catalan. El que pretenem ara és, simplement, recuperar aquests números a partir de la seva funció generatriu. Fent servir el desenvolupament de Taylor de $\sqrt{1 - x}$ al voltant de $x = 0$ i substituint a $h(x)$ és fàcil veure que només el signe menys pot correspondre a la funció generatriu, i per tant

$$h(x) = 1 + \frac{1}{2x} \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(2s-1)!!2^{s+1}}{(s+1)!} x^{s+1} = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{(2s-1)!!2^s}{(s+1)!} x^s,$$

d'on obtenim la nostra primera expressió explícita per als números de Catalan,

$$C_s = \frac{(2s-1)!!2^s}{(s+1)!} \quad \text{per a } s \geq 1.$$

Si volem una expressió més agradable, podem fer servir que

$$(2s)! = (2s)!!(2s-1)!! = s!2^s(2s-1)!!,$$

i aleshores arribem a

$$C_s = \frac{(2s)!}{s!(s+1)!} = \frac{1}{s+1} \binom{2s}{s},$$

que és l'expressió més habitual per als números de Catalan, vàlida ara per a tot $s \geq 0$.

A.4 Normalització i no-normalització de la distribució de la mida total

Passem ara a il·lustrar com la distribució de la mida total del procés, $P(S = s)$, està normalitzada només en els casos subcrític i crític. Per a la distribució del nombre de descendents utilitzarem com a exemple la distribució binomial amb $k = 0, 1$ i 2 . A la secció 2.9 hem vist que

$$P(S = s) = \frac{1}{s+1} \binom{2s}{s} p^{s-1} (1-p)^{s+1} \quad \text{amb } s = 1, 2, \dots$$

Fent servir la funció generatriu dels números de Catalan, és possible comprovar que aquesta expressió només està normalitzada per a $p \leq 1/2$, però no per $p > 1/2$. Per a veure-ho, considerem novament la funció generatriu dels números de Catalan, que acabem d'obtenir a la secció anterior de l'apèndix:

$$h(x) = \sum_{s=0}^{\infty} C_s x^s = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

Aleshores, introduint $q = 1 - p$,

$$\sum_{s=1}^{\infty} P(S = s) = \frac{q}{p} \sum_{s=1}^{\infty} C_s (pq)^s = \frac{q}{p} (h(pq) - 1),$$

i fent servir l'expressió per a $h(x)$, resulta

$$h(pq) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4pq}}{2pq} = \frac{1 - \sqrt{(1 - 2p)^2}}{2pq} = \frac{1 - |1 - 2p|}{2pq}.$$

Ara podem distingir dos casos. El primer, $p \leq 1/2$, per al qual

$$h(pq) - 1 = \frac{1}{q} - 1 = \frac{p}{q} = \frac{\min\{p, q\}}{\max\{p, q\}},$$

i per al cas contrari, $p \geq 1/2$, és

$$h(pq) - 1 = \frac{1}{p} - 1 = \frac{q}{p} = \frac{\min\{p, q\}}{\max\{p, q\}}.$$

Conseqüentment,

$$\sum_{s=1}^{\infty} P(S = s) = \frac{q}{p} \cdot \frac{\min\{p, q\}}{\max\{p, q\}} = \begin{cases} 1 & \text{per a } p \leq 1/2 \\ \left(\frac{q}{p}\right)^2 & \text{per a } p \geq 1/2 \end{cases},$$

cosa que ens recorda el nostre resultat sobre la probabilitat d'extinció per al cas binomial

$$\sum_{s=1}^{\infty} P(S = s) = P_{\text{ext}},$$

expressió que clarament no està normalitzada per a $p > 1/2$. També és possible arribar als mateixos resultats fent servir $g(x)$, la funció generatriu de la mida total de la població, però deixem aquest càlcul com a exercici per al lector.

Agraïments

Voldríem dedicar aquest treball al pintoresc científic Per Bak, coincidint amb el 25è aniversari de la seva invenció de la criticitat autoorganitzada, i amb el 10è aniversari de la seva prematura mort. Aquest article neix, en part, de la *Lorenz Lecture* que un dels autors va donar l'any 2011 al *Fall Meeting* de l'American Geophysical Union. En relació amb això, donem les gràcies a Armin Bunde, i també a Tom Davis, per penjar les seves notes sobre els números de Catalan públicament a internet, a Anna Deluca i Gunnar Pruessner pels seus comentaris interessants, a Cecília M. Clos per assistir-nos en l'edició gràfica i a Josep Maria Font i Rosalba García per l'ajut en la traducció al català. Aquest treball ha estat finançat pel Ministerio de Ciencia y Tecnología (FIS2009-09508), el Ministerio de Economía y Competitividad (FIS2012-31324) i la Generalitat de Catalunya (2009-SGR-164), que també finança Francesc Font-Clos a través de la beca 2012FI_B 00422.

Referències

- [1] ABRAMOWITZ, M; STEGUN, I. A. (ed). *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs, and mathematical tables*. Washington, DC: U.S. Government Printing Office, 1964. (National Bureau of Standards Applied Mathematics Series; 55)
- [2] ALLIGOOD, K. T.; SAUER, T. D.; YORKE, J. A. *Chaos. An introduction to dynamical systems*. Nova York: Springer-Verlag, 1997. (Textbooks in Mathematical Sciences)
- [3] ASCHWANDEN, M. J. «SOC systems in astrophysics». A: ASCHWANDEN, M. J. (ed). *Self-Organized Criticality Systems*. Berlín: Open Academic Press, 2013, 439–478.
- [4] BAK, P. *How nature works. The science of self-organized criticality*. Nova York: Copernicus, 1996.
- [5] BURROUGHS, S. M.; TEBBENS, S. F. «Power-law scaling and probabilistic forecasting of tsunami runup heights». *Pure Appl. Geophys.*, 162 (2005), 331–342.
- [6] CHRISTENSEN, K.; MOLONEY, N. R. *Complexity and criticality*. Londres: Imperial College Press, 2005. (Imperial College Press Advanced Physics Texts; 1)
- [7] CORRAL, A.; FONT-CLOS, F. «Criticality and self-organization in branching processes: application to natural hazards». A: ASCHWANDEN, M. J. (ed). *Self-organized criticality systems*. Berlín: Open Academic Press, 2013, 183–228.
- [8] CORRAL, A.; OSSÓ, A.; LLEBOT, J. E. «Scaling of tropical-cyclone dissipation». *Nature Phys.*, 6 (2010), 693–696.
- [9] FREEMAN, M. P.; WATKINS, N. W. «The heavens in a pile of sand». *Science*, 298 (2002), 979–980.
- [10] GRIMMETT, G. R.; STIRZAKER, D. R. *Probability and random processes*. 3a ed. Nova York: Oxford University Press, 2001.
- [11] GUTENBERG, B.; RICHTER, C. F. «Frequency of earthquakes in California». *Bull. Seismol. Soc. Am.*, 34 (1944), 185–188.
- [12] HARRIS, T. E. *The theory of branching processes*. Berlín: Springer-Verlag, 1963. (Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften; 119)
- [13] HAWKINS, D.; ULAM, S. «Theory of multiplicative processes I». LANL report, LA - 171.
- [14] JENSEN, H. J. *Self-organized criticality. Emergent complex behavior in physical and biological systems*. Cambridge: Cambridge University Press, 1998. (Cambridge Lecture Notes in Physics; 10)
- [15] JOLIS, M. «Desapareixerà el teu cognom?». *MATerials MATemàtics*, treball núm. 4 (2010), 29 p.
- [16] KAGAN, Y. Y. «Earthquake size distribution: Power-law with exponent $\beta \equiv 1/2$?» *Tectonophys.*, 490 (2010), 103–114.

- [17] KANAMORI, H.; BRODSKY, E. E. «The physics of earthquakes». *Rep. Progr. Phys.*, 67 (8) (2004), 1429-1496.
- [18] KANAMORI, H.; MORI, J. «Microscopic processes on a fault plane and their implications for earthquake dynamics». A: *Problems in geophysics for the new millennium*. Bolònia: Editrice Compositori, 2000, 73-88.
- [19] MALAMUD, B. D. «Tails of natural hazards». *Phys. World*, 17 (8) (2004), 31-35.
- [20] MALAMUD, B. D.; MILLINGTON, J. D. A.; PERRY, G. L. W. «Characterizing wildfire regimes in the United States». *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 102 (2005), 4694-4699.
- [21] MCCLELLAND, L.; SIMKIN, T.; SUMMERS, M.; NIELSEN, E.; STEIN, T. C. (ed.) *Global volcanism 1975-1985*. Englewood Cliffs: Prentice Hall, 1989.
- [22] NEWMAN, M. E. J. «Power laws, Pareto distributions and Zipf's law». *Cont. Phys.*, 46 (2005), 323-351.
- [23] OTSUKA, M. «A simulation of earthquake occurrence part 2. Magnitude-frequency relation of earthquakes». *Zisin*, 24 (1971), 215-227. [En japonès]
- [24] OTSUKA, M. «A chain-reaction-type source model as a tool to interpret the magnitude-frequency relation of earthquakes». *J. Phys. Earth*, 20 (1972), 35-45.
- [25] OTTER, R. «The multiplicative process». *Ann. Math. Statistics*, 20 (1949), 206-224.
- [26] PAPOULIS, A. *Probability, random variables, and stochastic processes*. 2a ed. Nova York: McGraw-Hill Book Co., 1984. (McGraw-Hill Series in Electrical Engineering. Communications and Information Theory)
- [27] PETERS, O.; DELUCA, A.; CORRAL, A.; NEELIN, J. D.; HOLLOWAY, C. E. «Universality of rain event size distributions». *J. Stat. Mech.*, P11030.
- [28] PRUESSNER, G.; PETERS, O. «Self-organized criticality and absorbing states: Lessons from the Ising model». *Phys. Rev. E*, 73 (2006), 025106(R).
- [29] ROSS, S. M. *A first course in probability*. 2a ed. Nova York: MacMillan Publishing Co., 1984.
- [30] SAICHEV, A.; HELMSTETTER, A.; SORNETTE, D. «Power-law distributions of offspring and generation numbers in branching models of earthquake triggering». *Pure Appl. Geophys.*, 162 (2005), 1113-1134.
- [31] SPIVAK, M. *Calculus*. Berkeley, Califòrnia: Publish or Perish, Inc., 1980.
- [32] STANLEY, R. P. *Enumerative combinatorics*. Vol. 2. Cambridge: Cambridge University Press, 1999. (Cambridge Studies in Advanced Mathematics; 62)
- [33] ULAM, S. M. *Adventures of a mathematician*. Nova York: Charles Scribner's Sons, 1976.
- [34] WATSON, H. W.; GALTON, F. «On the probability of the extinction of families». *J. Anthropol. Inst. Great Britain*, 4 (1875), 138-144.

- [35] ZAPPERI, S.; LAURITSEN, K. B.; STANLEY, H. E. «Self-organized branching processes: Mean-field theory for avalanches». *Phys. Rev. Lett.*, 75 (1995), 4071-4074.

CENTRE DE RECERCA MATEMÀTICA I
DEPARTAMENT DE MATEMÀTIQUES DE LA UAB
EDIFICI C, CAMPUS BELLATERRA
UNIVERSITAT AUTÒNOMA DE BARCELONA
08193 BELLATERRA, BARCELONA
{acorral,fontclos}@crm.cat